第 17 章
微分方程 (Differential Equations)

目錄

17.1 微分方程概念 (Differential Equations)

定義 17.1.1. (1) 一個微分方程若只牽涉到一個變數的微分, 則稱爲*常微分方程* (ordinary differential equation)。

(2) 若一個微分方程牽涉到多變數之未知函數的偏微分, 則稱爲*偏微分方程* (partial differential equation)。

(3) 在微方中所出現之導數階數之最高者稱爲此微方之*階數* (order)。

(4) 形如 $a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=f(x)$ 之微方稱爲 *n 階線性 微方* (linear differential equation)。

(5) 上式中的 $f(x)$ 稱爲*非齊次項* (nonhomogeneous term); 若 $f(x)=0$, 則稱此微方爲*齊次微方* (homogeneous differential equation)。

定理 17.1.2. 若 y_1 及 y_2 是一齊次線性微分方程 $a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=0$ 之解, c_1 及 c_2 是任意兩常數, 則線性組合 $c_1y_1+c_2y_2$ 仍爲其解。

定理 17.1.3. 若 y_1 是一齊次線性微分方程 $a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=0$ 之解, 若 y_2 是非齊次線性微分方程 $a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=f(x)$ 之解, 則 y_1+y_2 是該非齊次線性微分方程之解。

例 17.1.4. (a) 驗證 $y=\sin 2x$ 及 $y=\cos 2x$ 滿足微方 $y''+4y=0$ 。

(b) 求其中一解 $y(x)$ 使其滿足起始條件 $y(0)=2$ 及 $y'(0)=-4$ 。

17.2 一階微分方程 (First Order Differential Equations)

註 17.2.1. (1) 最簡單的微方是可離微方其解法介紹於第7 章 。

(2) 一階線性微分方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, 其解法亦介紹於第 7 章 。

一階齊次微方

註 17.2.2. 形如 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ 之微方, 稱爲*一階齊次微方* (first-order homogeneous equation) 。 [解法: 令 $y = xv(x)$ 。]

例 17.2.3. 解微方 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy}{xy+y^2}$ 。

正合微方

定義 17.2.4. (1) 若 $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ 是一個函數的 $\phi(x,y)$ 的微分：$d\phi(x,y) = M(x,y)dx+N(x,y)dy$, 則微方 $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ 稱爲*正合微方* (exact differential equations) 。

(2) ϕ 稱爲此微方的*積分函數* (integral function) 。

(3) $\phi(x,y) = C$ 稱爲此微方的*解曲線* (solution curvs) 。

例 17.2.5. 驗證微方 $(2x + \sin y - ye^{-x})dx + (x\cos y + \cos y + e^{-x})dy = 0$ 是正合, 並求其解曲線 。

積分因子

定義 17.2.6. $Mdx + Ndy = 0$ 可能乘上函數 $\mu(x,y)$ 使其成爲正合, 則 $\mu(x,y)$ 稱爲*積分因子* (integration factor)。

[註]

(1) 積分因子 $\mu(x,y)$ 滿足: $M(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu(x,y)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ 。

(2) 若積分因子 $\mu(x)$ 只與 x 有關, 則其滿足: $N(x,y)\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ 。

例 17.2.7. (a) 證明 $(x+y^2)dx + xydy = 0$ 有只與 x 有關的積分因子。

(b) 求此積分因子 。

(c) 解此微方 。

17.3 二階微分方程 (Second Order Differential Equations)

可化約爲一階之微方

註 17.3.1. (1) 一般二階微方形如 $F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$ 。

(2) 若二階微方形如 $F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0$, 則可作變換 $v = \frac{dy}{dx}$ 使其呈 $F\left(\frac{dv}{dx}, v, x\right) = 0$ 的形式。

(3) 若二階微方形如 $F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0$, 則可作變換 $v = \frac{dy}{dx}$ 使其呈 $F\left(v\frac{dv}{dy}, v, y\right) = 0$ 的形式。

例 17.3.2. (1) 解微方 $\frac{d^2y}{dx^2} = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$。

(2) 解微方 $y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$。

二階線性微方

定義 17.3.3. (1) 形如 $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$ 之微分方程稱爲二階線性微分方程 (second-order linear differential equation), 其中要求 $a_2(x)$、$a_1(x)$ 和 $a_0(x)$ 均爲連續函數。

(2) 若 $f(x) \equiv 0$, 則此微分方程稱爲齊次(homogeneous)。

定理 17.3.4. 若 y_1 及 y_2 是一齊次線性微分方程 $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ 之解, c_1 及 c_2 是任意兩常數, 則線性組合 $c_1y_1 + c_2y_2$ 仍爲其解。

定義 17.3.5. 若兩函數 y_1 及 y_2, 任一個均不爲另一個函數之常數倍, 則稱他們是線性獨立的 (linearly independent)。

定理 17.3.6. 若 y_1 及 y_2 爲齊次線性微分方程 $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ 之解, 且它們是線性獨立的, 則此微分方程之通解 (general solutions) 爲 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$。

定理 17.3.7. 考慮二階常係數齊次線性微分方程 $ay''+by'+cy = 0, a \neq 0$, 方程式 $ar^2+br+c = 0$ 稱爲其特徵方程式或 輔助方程(characteristic equation or auxiliary equation)。

(1) 若 $b^2 - 4ac > 0$, r_1 及 r_2 爲特徵方程之兩相異實根, 則微方的通解爲 $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$。

(2) 若 $b^2 - 4ac = 0$, r 爲特徵方程之根, 則微方的通解爲 $y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$。

(3) 若 $b^2 - 4ac < 0$, $r_1 = \alpha + i\beta$ 及 $r_2 = \alpha - i\beta$ 爲特徵方程之複數根, 則微方的通解爲 $y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$。

例 17.3.8. (a) 證明 $y_1 = e^{-2x}$ 是微方 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的一解。

(b) 求此微方的通解。

例 17.3.9. 解以下微方:

(1) $y'' + y' - 6y = 0$,

(2) $4y'' + 12y' + 9y = 0$,

(3) $y'' - 6y' + 13y = 0$。

17.4 常係數線性微分方程 (Linear Differential Equations with Constant Coefficients)

常係數線性微分方程

定義 17.4.1. (1) 形如 $a_n y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1y'(x)+a_0y(x)=f(x), a_i\in\mathbb{R}$, 之微方稱爲 *$n$ 階常係數線性微方* (linear differential equation with constant coefficients)。

(2) $a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_1rx+a_0=0$ 稱爲該微方的*輔助方程式* (auxiliary equation)。

定理 17.4.2. 前述常係數線性微方之通解可以表爲 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ky_k(x)$, 其中 $y_1,y_2,\ldots,y_k$ 是 k 個獨立的特解, $C_1,C_2,\ldots,C_k$ 爲任意常數。特解可由下列方式得到:

(a) 若 r_1 是輔助方程的一個 k-重實根, 則 $e^{r_1t},te^{r_1t},t^2e^{r_1t},\ldots,t^{k-1}e^{r_1t}$ 是 k 個獨立的 特解。

(b) 若 $r_2=a+bi,r_3=a-bi$ 是輔助方程的 k-重共軛複數根, 則 $e^{at}\cos bt,te^{at}\cos bt,\ldots,t^{k-1}e^{at}\cos bt,e^{at}\sin bt,te^{at}\sin bt,\ldots,t^{k-1}e^{at}\sin bt$ 是 $2k$ 個獨立的特解。

例 17.4.3. 解以下微方:

(1) $y^{(4)}-16y=0$,

(2) $y^{(5)}-2y^{(4)}+y^{(3)}=0$ 。

例 17.4.4. 一個常係數線性齊次微方的輔助方程是 $(r+4)^3(r^2+4r+13)^2=0$, 則此微方的階數及通解爲何?

Euler 微分方程

定義 17.4.5. 形如 $ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$ 之微分方程稱爲*Euler 微分方程* 。

定理 17.4.6. Euler 微分方程之解法如下: 令 $y=x^r$, 其輔助方程式爲 $ar^2+(b-a)r+c=0$,

(a) 若 $(b-a)^2\geq 4ac$, 其輔助方程式之根爲 r_1,r_2, 則通解爲 $y=C_1|x|^{r_1}+C_2|x|^{r_2}$ 。

(b) 若 $(b-a)^2=4ac$, 其輔助方程式之根爲 r, 則通解爲 $y=C_1|x|^r+C_2|x|^r\ln|x|$ 。

(c) 若 $(b-a)^2<4ac$, 其輔助方程式之根爲 $\alpha\pm\beta i$, 則通解爲 $y=C_1|x|^\alpha\cos(\beta\ln|x|)+C_2|x|^\alpha\sin(\beta\ln|x|)$ 。

例 17.4.7. 解以下微方:

(1) $2x^2y''-xy'-2y=0,\quad y(1)=5,\quad y'(1)=0$,

(2) $x^2y''-3xy'+13y=0$ 。

17.5 非齊次線性微分方程 (Nonhomogeneous Linear Differential Equations)

定理 17.5.1. 考慮微分方程 $ay'' + by' + cy = G(x)$, 其特解 (particular solution) 爲 $y_p(x)$。微分方程 $ay'' + by' + cy = 0$ 稱爲 complementary 方程, 其通解爲 $y_c(x)$。則原微分方程之通解爲 $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$。

<u>未定係數法</u> (Method of indetermined coefficients)

註 17.5.2. 考慮 $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$。令 $y_p(x)$ 爲其特解。令

$$\begin{aligned}A_n(x) =& a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\\ B_n(x) =& b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n,\\ P_n(x) =& p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\ 。\end{aligned}$$

要求 $y_p(x)$ 可根據下列規則

(a) 若 $f(x) = P_n(x)$, 則嘗試 $y_p(x) = x^mA_n(x)$;

(b) 若 $f(x) = P_n(x)e^{rx}$, 則嘗試 $y_p(x) = x^mA_n(x)e^{rx}$;

(c) 若 $f(x) = P_n(x)e^{rx}\sin(kx)$, 則嘗試 $y_p(x) = x^me^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\sin(kx)$;

(d) 若 $f(x) = P_n(x)e^{rx}\cos(kx)$, 則嘗試 $y_p(x) = x^me^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\sin(kx)$,

其中 $m = 0, 1$ 或 2 的最小整數, 使得 $y_p(x)$ 中不含所對應齊次方程之通解 。

例 17.5.3. 解以下微方:

(1) $y'' + 4y = \sin x$,

(2) $y'' + 4y = \sin(2x)$,

(3) $y'' + 4y = \sin x + \sin(2x)$。

例 17.5.4. 解以下微方:

(1) $y'' + y' - 2y = 4x^2$,

(2) $y'' + 4y = e^{3x}$,

(3) $y'' + y' - 2y = \sin x$,

(4) $y'' + 2y' + 4y = x\cos 3x$,

(5) $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$,

(6) $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x$ 。

<u>參數變動法</u> (Method of variation of parameters)

註 17.5.5. 考慮 $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$。所對應齊次方程之通解爲 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 。我們假設原方程的之特解爲 $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$。
在假設 $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ 之下, 我們可得 $a_2(x)(u_1'y_1' + u_2'y_2') = f(x)$。由此可解 u_1', u_2', 因此得 $u_1(x)$ 及 $u_2(x)$。

例 17.5.6. 解微方 $y'' + y = \tan x$ 之通解。

例 17.5.7. 解 $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ 。