第 8 章

參數曲線與極座標曲線 (Parametric Curves and Polar Curves)

目錄

8.1 參數曲線

定義 8.1.1. (1) $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 稱爲參數 t 的參數方程 (parametric equation)。

(2) 若 $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in I$, 則點集合 $\mathcal{C} = \{(x, y) = (f(t), g(t)) | t \in I\}$ 稱爲 參數曲線 (parametric curve), 該方程式稱爲此曲線的參數方程或參數式。

(3) t 稱爲參數, I 稱爲曲線區間, 若 $I = [a, b]$, 則 $(f(a), g(a))$ 爲起點 (initial point), $(f(b), g(b))$ 爲終點 (terminal point)。

(4) 平面曲線 $\mathcal{C}$ 是平面上的點集合, 使得 $x = f(t), y = g(t), t \in I$ 其中 f, g 均爲 I 上的連續函數。I 及 f, g 稱爲 $\mathcal{C}$ 的參數。

例 8.1.2. (a) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$。

(b) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0, \pi]$。

(c) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, t 從 π 到 0。

(d) $x=\sin 2t,\ y=\cos 2t$、$t\in[0,2\pi]$。

例 8.1.3. 以下均是單位圓的參數化:

(a) $x=\cos t, y=\sin x \quad 0\le t\le 2\pi,$

(b) $x=\cos t^2, y=\sin t^2 \quad 0\le t\le \sqrt{2\pi},$

(c) $x=\cos(\pi u+1), y=\sin(\pi u+1), \quad -1\le u\le 1,$

(d) $x=1-t^2, y=t\sqrt{2-t^2} \quad \sqrt{2}\le t\le\sqrt{2},$

例 8.1.4. (a) $x=t, y=t^2, t\in\mathbb{R}$。

(b) $x=\sqrt{t},\ y=t,\ t\ge 0$。

例 8.1.5. (1) 一圓以 (h,k) 爲圓心,r 爲半徑, 求參數方程。

(2) 將起點爲 $(-2,1)$, 終點爲 $(3,5)$ 之線段參數化。

(3) 將橢圓參數化。

(4) 將雙曲線參數化。

例 8.1.6. 若一函數 $y=f(x)$ 可將其參數化爲 $x=t,\ y=f(t)$。則其反函數可參數化爲 $x=f(t)$, $y=t$。

例 8.1.7. (1) 作圖 $x=t^2-2t,\ y=t+1$。

(2) 作圖 $x=t^3-3t,\ y=t^2, -2\le t\le 2$。

(3) 作圖 $x=\cos t,\ y=\sin 2t$。

例 8.1.8. 擺線 (cycloid): 一圓沿著直線滾動, 圓周上固定一點 P, 其軌跡稱爲擺線。寫出其參數式。

例 8.1.9. 圓的漸伸線 (involute of circle): 一線緊繞在圓心爲原點, 半徑爲 a 的圓上, 假設線端在 $(a,0)$ 。現將線端逐漸拉開, 離開圓的部份呈一直線, 則線端的軌跡爲漸伸線。試寫出其軌跡方程式。

8.2 參數曲線之切線

定理 8.2.1. 令 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 爲一參數曲線。假設此曲線可微, 即 $f(t)$ 及 $g(t)$ 均可微。並假設 $\frac{dx}{dt}\ne 0$, 則 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$。

[註] 若 f', g' 在 t_0 不同時爲 0, 則曲線 $x=f(t), y=g(t)$ 在 $(f(t_0),g(t_0))$ 的切線爲

$$\begin{cases} x=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0) \\ y=g(t_0)+g'(t_0)(t-t_0) \end{cases},$$

法線爲

$$\begin{cases} x=f(t_0)+g'(t_0)(t-t_0) \\ y=g(t_0)-f'(t_0)(t-t_0) \end{cases}。$$

例 8.2.2. 若 $x = 2t + 3$, $y = t^2 - 1$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=6}$。

例 8.2.3. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 可寫成 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$,$0 \le t \le 2\pi$。求在 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 的切線方程式 $(a, b > 0)$。

例 8.2.4. 一擺線之參數式爲 $\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$ (r 爲一固定值)。

(a) 求它在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 的切線方程式;

(b) 求它的水平及垂直切線。

定理 8.2.5. 令 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 爲一參數曲線。在某區間上 $f'(t) \neq 0$, 則其凹凸性由

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}$$

所決定。

例 8.2.6. 曲線 $\mathcal{C}$ 由 $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^2 \end{cases}$ 所定義。

(a) 求曲線上自我相交的點;

(b) 證明 $\mathcal{C}$ 在 $(0, 3)$ 有兩條切線, 求其方程式;

(c) 求 $\mathcal{C}$ 的水平及垂直切線;

(d) 求 $\mathcal{C}$ 的昇降範圍;

(e) 求 $\mathcal{C}$ 的凹向上及凹向下範圍;

(f) 描繪此曲線。

8.3 參數式之面積

定理 8.3.1. 令曲線爲 $\mathcal{C} = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$,$t \in [a, b]$, 假設 f 可微, 且 g 連續。令 A 爲 $\mathcal{C}$, $x-$軸及 $x = f(a), x = f(b)$ 所圍成的區域面積 。

(i) 若 $f'(t) \ge 0, g(t) \ge 0$ 則 $A = \int_a^b g(t)f'(t)dt$,

(ii) 若 $f'(t) \ge 0, g(t) \le 0$ 則 $A = -\int_a^b g(t)f'(t)dt$,

(iii) 若 $f'(t) \le 0, g(t) \ge 0$ 則 $A = -\int_a^b g(t)f'(t)dt$,

(iv) 若 $f'(t) \le 0, g(t) \le 0$ 則 $A = \int_a^b g(t)f'(t)dt$。

[註]

(1) 若 $\mathcal{C}$ 爲不自交 (non-self-intersecting) 的曲線, 令其所"包圍"的區域面積爲 A。

(i) 若 t 增加時, $\mathcal{C}$ 順時針旋轉, 則 $A = \int_a^b g(t)f'(t)dt$,

(ii) 若 t 增加時, $\mathcal{C}$ 逆順時針旋轉, 則 $A = -\int_a^b g(t)f'(t)dt$。

(2) 假設 g 可微, 且 f 連續, 則 $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ 亦有類似的意義。

例 8.3.2. 求橢圓內部的面積。

例 8.3.3. 求擺線 $\left\{\begin{array}{l} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1-\cos\theta) \end{array}\right.$ 在一拱 (one arch) 之下的面積。

8.4 參數式之弧長

定義 8.4.1. 令 $\mathcal{C}$ 爲參數曲線 $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right.$ $, t \in [a,b]$。假設 f' 及 g' 在 $[a,b]$ 均爲連續, 且不同時爲零, 又當 t 從 a 增加到 b 時, (x,y) 恰繞過 C 一次, 則 $\mathcal{C}$ 的弧長爲

$$L = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt。$$

例 8.4.2. 求圓周長。

例 8.4.3. 求擺線 $\left\{\begin{array}{l} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1-\cos\theta) \end{array}\right.$ 一拱的長。

例 8.4.4. 求曲線 $\left\{\begin{array}{l} x = e^t\cos t \\ y = e^t \sin t \end{array}\right.$ $0 \le t \le 2$ 的長。

例 8.4.5. 曲線 $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t \end{array}\right.$ 所圍成的圈, 其長度若干?

8.5 參數式之表面積

定理 8.5.1. 令 $\mathcal{C}$ 爲參數曲線 $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right.$ $, t \in [a,b]$, 且當 t 從 a 增加到 b 時, (x,y) 恰繞過 $\mathcal{C}$ 一次, 則

(1) 將 $\mathcal{C}$ 繞 x-軸旋轉, 其表面積爲 $S = \int_{\mathcal{C}} 2\pi|y|\,ds = \int_a^b 2\pi|y|\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$,

(2) 將 $\mathcal{C}$ 繞 y-軸旋轉, 其表面積爲 $S = \int_{\mathcal{C}} 2\pi|x|\,ds = \int_a^b 2\pi|x|\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$。

(3) 其一般形式爲 $S = \int_{\mathcal{C}} 2\pi$(半徑長)(細帶寬)$= \int_C 2\pi\rho\, ds$。

例 8.5.2. 求半徑 r 的球面表面積。

例 8.5.3. 將圓 $\left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{array}\right.$ $, t \in [0, 2\pi]$ 繞 x-軸旋轉, 求其表面積。

例 8.5.4. 將曲線 $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right.$ 繞 x-軸旋轉, 求其表面積。

8.6 極座標

定義 8.6.1. (1) 在平面上取一點 O 爲極點 (pole), 以 O 爲起點之射線爲極軸 (polar axis)。對平面上 其他任意點 P, r 是 $\overrightarrow{OP}$ 的有向距離, θ 爲極軸旋轉到 $\overrightarrow{OP}$ 的有向角, 則 $[r,\theta]$ 稱爲 P 的極座標 (polar coordinate)。

(2) 原點的座標爲 $[0,\theta]$, 其中 θ 爲任意實數。

(3) 對任意的 r,θ 而言, $[r,\theta],[r,\theta+2n\pi],[-r,\theta+(2n+1)\pi]$ 均表示同一點 $(n\in\mathbb{Z})$。

例 8.6.2. 以下是各點的極座標, 試描繪這些點。

(a) $\left[1,\frac{5\pi}{4}\right]$。

(b) $[2,3\pi]$。

(c) $\left[2,-\frac{2\pi}{3}\right]$。

(d) $\left[-3,\frac{3\pi}{4}\right]$。

例 8.6.3. 求 $P\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$ 的所有極座標表示法。

性質 8.6.4. (直角座標與極座標之關係)

(1) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$。

(2) $x^2+y^2=r^2, \tan\theta=\frac{y}{x}$。

例 8.6.5. (a) 將極座標 $\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ 改爲直角座標。

(b) 將直角座標 $(1,-1)$ 改爲極座標。

例 8.6.6. (a) 將 $x^2+y^2=9$ 改爲極座標。

(b) 將 $2x-3y=5$ 改爲極座標。

例 8.6.7. 將以下各方程式改爲直角座標:

(a) $r\cos\theta=4$。

(b) $r=\frac{4}{2\cos\theta-\sin\theta}$。

(c) $r=1+2r\cos\theta$。

(d) $r=1-\cos\theta$。

8.7 極座標之圖形

定義 8.7.1. 極座標方程 $r = f(\theta)$, 或 $F(r,\theta) = 0$。考慮所有平面上的點 P, 其中 P 的某一個座標滿足此方程, 則這些 P 點所構成的集合稱爲此方程的圖形。

性質 8.7.2. (對稱性)

(1) 若 $[r,\theta]$ 在某圖形上, 則 $[r,-\theta]$ 或 $[-r,\pi-\theta]$ 在該圖形上 $\Leftrightarrow$ 圖形對 x-軸對稱。

(2) 若 $[r,\theta]$ 在某圖形上, 則 $[r,\pi-\theta]$ 或 $[-r,-\theta]$ 在該圖形上 $\Leftrightarrow$ 圖形對 y-軸對稱。

(3) 若 $[r,\theta]$ 在某圖形上, 則 $[-r,\theta]$ 或 $[r,\pi+\theta]$ 在該圖形上 $\Leftrightarrow$ 圖形對原點對稱。

例 8.7.3. 作以下方程式的圖形:

(a) $r = a$。

(b) $\theta = \theta_0$。

(c) $1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$。

(d) $-3 \le r \le 2, \theta = \frac{\pi}{4}$。

(e) $r \le 0, \theta = \frac{\pi}{4}$。

(f) $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$。

例 8.7.4. 作以下心臟線 (cardioid) 的圖形:

(a) $r = 1 - \cos\theta$,

(b) $r = 1 - 2\sin\theta$,

(c) $r = 2 + \cos\theta$ 。

例 8.7.5. 作以下玫瑰線的圖形:

(a) $r = \sin 2\theta$,

(b) $r = \cos 3\theta$,

(c) $r = \sin 4\theta$ 。

例 8.7.6. 作以下雙紐線 (lemniscate) 的圖形:

(a) $r^2 = 4\cos\theta$,

(b) $r^2 = \sin 2\theta$ 。

例 8.7.7. 作以下螺線 (spiral) 的圖形:

(a) $r = \theta$ (equiangular spiral),

(b) $r = e^{-\theta/3}$ (exponential spiral) 。

例 8.7.8. 作 $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$ 之圖形。

[註] $r=f(\theta-\theta_0)$ 之圖形是將 $r=f(\theta)$ 之圖形繞極軸旋轉 θ_0 而得。

例 8.7.9. 作圖 $r=\sin\frac{8\theta}{5}$。

交點

例 8.7.10. 證明 $[2,\frac{\pi}{2}]$ 在曲線 $r=2\cos 2\theta$ 上。

例 8.7.11. (1) 求 $r=\cos 2\theta$ 及 $r=\frac{1}{2}$ 之交點。

(2) 求 $r=\sin\theta$ 及 $r=1-\sin\theta$ 之交點。

(3) 求 $r^2=4\cos\theta$ 及 $r=1-\cos\theta$ 之交點。

8.8 極曲線之切線

定理 8.8.1. (1) $r=f(\theta)$ 之斜率爲 $\frac{dy}{dx}|_{(r,\theta)}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$, 若 $\frac{dx}{d\theta}\neq 0$。

(2) 若 $r=f(\theta)$ 在 $\theta=\theta_0$ 通過原點 , 則 $\frac{dy}{dx}|_{\theta=\theta_0}=\tan\theta_0$。

定理 8.8.2. (1) 令 P 爲極曲線 $r=f(\theta)$ 上異於極點的一點, ψ 爲直線 OP 與在 P 點之切線的夾角, 則 $\tan\psi=\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$ 。

(2) 若 $f'(\theta)=0$, 則 $\psi=\frac{\pi}{2}$。

(3) 若 $f(\theta)=0$ 且切線存在, 則切線方程式爲 $\theta=\theta_0$。

(4) 若 $\psi+\theta=\pi$, 則有垂直切線。

(5) 若 $\psi+\theta=\pi$, 則有水平切線。

例 8.8.3. 考慮 $r=1+\cos\theta$。

(a) 求過 $[\frac{3}{2},\frac{\pi}{6}]$ 之切線。

(b) 求其水平及垂直切線。

(c) 求過原點之切線。

例 8.8.4. (a) 求 $r=1+\sin\theta$ 在 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 的切線斜率。

(b) 求水平及垂直的切線。

8.9 極曲線之面積

定理 8.9.1. 極曲線 $r=f(\theta)$ 及射線 $\theta=\alpha$、$\theta=\beta$ 所圍的區域面積爲 $A=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2d\theta$, 其中 $f(\theta)$ 爲正值連續函數, 且 $0\leq\beta-\alpha\leq 2\pi$。

例 8.9.2. 求 $r=2(1+\cos\theta)$ 所圍的面積。

例 8.9.3. 求玫瑰線 $r=\cos 2\theta$ 之一圈所圍的面積。

例 8.9.4. 求 $r = 2\cos\theta + 1$ 之圖形中小圈的面積。

例 8.9.5. 求在 $r = 1$ 之內，且在 $r = 1 - \cos\theta$ 之外的面積。

例 8.9.6. 求在 $r = \sqrt{2}\sin\theta$ 之內，且在 $r^2 = \sin 2\theta$ 之外的面積。

例 8.9.7. 求在 $r = \sin\theta$ 之內, 且在 $r = \sin 2\theta$ 之外的區域面積。

例 8.9.8. (a) 求 $r = 3\sin\theta$ 及 $r = 1 + \sin\theta$之交點。

(b) 求在圓 $r = 3\sin\theta$ 之內, 且在心臟線 $r = 1 + \sin\theta$ 之外的面積。

8.10 極曲線之曲線弧長

定理 8.10.1. 設 $r = f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 其導函數爲連續, 且當 θ 從 α 到 β, $P(r, \theta)$ 恰繞曲線一次, 則曲線長爲 $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta$。

例 8.10.2. 求心臟線 $r = a(1 + \cos\theta)$ 之全長。

8.11 極曲線之旋轉體表面積

定理 8.11.1. 假設 $r = f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 之導函數爲連續, 且當 θ 從 α 到 β , $P(r, \theta)$ 恰繞曲線一次。將該曲線或 x 軸 (或 y 軸) 旋轉得一旋轉面, 其表面積爲:

(1) 繞 x-軸: $S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta$,

(2) 繞 y-軸: $S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta$。

例 8.11.2. 將 $r^2 = \cos 2\theta$ 之右圈繞 y-軸旋轉, 求旋轉面表面積。

例 8.11.3. 設 R 爲在 $r^2 = 6\cos 2\theta$ 及 $r = \sqrt{3}$ 內部, 且在第一象限內的區域, 求:

(a) R 的面積。

(b) R 繞 x-軸旋轉的表面積。