第 7 章
積分應用 (Applications of Integration)

目錄

(i) 以立體體積, 旋轉體體積, 曲線弧長, 旋轉面表面積, 力矩與質心等之求法爲例, 介紹如何應用積分。

(ii) 介紹 Pappus 定理。

(iii) 介紹一階線性微分方程。

7.1 切片法求體積(Volumes by slicing)

定義 7.1.1. 令 S 爲介於 $x=a$ 及 $x=b$ 之間的立體區域。P_x 是通過 x-座標爲 x, 且與 x-軸垂直之平面。假設 S 在 P_x 的截面積是 $A(x)$, 而 $A(x)$ 爲可積的函數, 則 S 的體積爲 $V=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} A(x_i^*)\triangle x=\int_a^b A(x)\,dx$。

例 7.1.2. 金字塔形的立體, 底爲邊長 L 的正方形, 高爲 h 。求其體積。

例 7.1.3. (Cavalieri 原理) 兩立體高度相等, 且對每個高度, 其截面積均相等, 則它們的體積相等。

例 7.1.4. 一立體底部是半徑爲 a 的圓, 與底垂直之截面爲等邊三角形。求其體積。

例 7.1.5. 兩個半徑爲 a 的圓柱, 其軸垂直相交。求相交部分內部的體積。

例 7.1.6. 一個楔形體 (wedge) 是從一個半徑爲 4 之直圓柱中利用兩平面切出。一平面是與 z-軸垂直, 另一平面則與該平面在直徑 處交 $30°$。求該立體體積。

7.2 旋轉體體積

定義 7.2.1. 平面上有一區域及一不與該區域內部相交的直線, 將該區域繞此直線旋轉而得一立體, 稱爲*旋轉體* (solid of revolution)。

圓盤法 (Volumes by Slicing, Disk Method)

定理 7.2.2. 令旋轉軸爲 x-軸, 且該區域所在之範圍爲 $x \in [a, b]$ 。若此區域在 x-座標爲 x 處的旋轉半徑爲 $R(x)$, 則旋轉體體積爲 $V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b R(x)^2 dx$。

[註] 若旋轉軸不是 x-軸, 仍可利用同樣的想法寫出其積分式。

例 7.2.3. 求半徑爲 r 之球體體積。

例 7.2.4. 求底半徑爲 r, 高爲 h 之直圓錐體的體積。

例 7.2.5. 將曲線 $y = x^2$, $y = 1$ 所圍之區域繞直線 $y = 2$ 旋轉, 求其體積。

例 7.2.6. 一個區域 R 是由 $x = 2y - y^2$ 及 y-軸所圍之區域。求其繞 y-軸旋轉的旋轉體體積。

例 7.2.7. 將 $y = x^3, y = 8, x = 0$ 所圍區域繞 y-軸旋轉得一立體, 求其體積。

例 7.2.8. 令 R 爲 $x = y^2 + 1$ 與 $x = 3$ 所圍區域。將其繞直線 $x = 3$ 旋轉, 求其體積。

定理 7.2.9. 若一區域由 $y = R(x), y = r(x), x = a, x = b$ 所圍成, 旋轉後得到環狀體, 其截面爲環狀, 外半徑爲 $R(x)$, 內半徑爲 $r(x)$, 則體積爲 $V = \pi \int_a^b [R(x)^2 - r(x)^2] dx$。

例 7.2.10. 一區域 R 以 $y = x^2 + 1$ 及 $y = -x + 3$ 爲界。將其繞 x-軸旋轉, 求其旋轉體體積。

柱狀殼法 (Cylindrical Shell Method)

定理 7.2.11. 令 R 爲 $y = f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ 與 x-軸及 $x = a, x = b$ 所圍成的區域。將 R 繞 $x = L$ $(L \leq a)$ 旋轉, 則旋轉體體積爲 $V = 2\pi \int_a^b (\text{殼半徑})(\text{殼高}) dx = 2\pi \int_a^b (x - L) f(x) dx$。

例 7.2.12. 將曲線 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上的區域繞 x-軸旋轉, 求其體積。

例 7.2.13. 將曲線 $y = 2x^2 - x^3$ 及 $y = 0$ 所圍的區域繞 y-軸旋轉, 求旋轉體體積。

例 7.2.14. 將曲線 $y = x - x^2$ 及 $y = 0$ 所圍的區域繞 $x = 2$ 旋轉, 求其體積。

例 7.2.15. 將 $x = 3y^2 - 2$ 及 $x = y^2$ 所圍成之區域繞 x-軸旋轉, 求其體積。

例 7.2.16. 將圓 $(x - b)^2 + y^2 = a^2,\ a < b$, 繞 y-軸旋轉得一 torus, 求旋轉體體積。

例 7.2.17. 區域 R 是由 $y = x$ 及 $y = x^2$ 所圍成。

(1) 將 R 繞 x-軸旋轉;

(2) 將 R 繞 y-軸旋轉;

(3) 將 R 繞 $y = 2$ 旋轉;

(4) 將 R 繞 $x = -1$ 旋轉,

求其體積。

例 7.2.18. 將 $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ 及 x-軸所圍成的區域繞 $y = c$, $0 \leq c \leq 1$ 旋轉。求 c 之值, 使其繞成 的體積最小。

例 7.2.19. 將 $y = \frac{1}{2}x^2, x = 0$ 及 $y = 5$ 所圍之區域繞 y-軸旋轉得一碗, 將水以每秒 3 單位的速率倒入, 則在水面高 4 單位時, 水面上升速率若干?

7.3 平面曲線之弧長(Lengths of plane curves)

定義 7.3.1. (1) 若 f' 在 $[a,b]$ 上連續, 則曲線 $y=f(x)$, $a\le x\le b$, 的弧長 (arc length) 是

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx。$$

(2) 若曲線爲 $x=g(y)$, $c\le y\le d$, $g'(y)$ 爲連續, 則弧長爲

$$L=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}dy=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy。$$

例 7.3.2. 求半徑爲 r 之圓的圓周長。

例 7.3.3. 求曲線 $y=x^4+\frac{1}{32x^2}1\le x\le 2$, 之弧長。

例 7.3.4. 求曲線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),0\le x\le 2$, 之弧長。

例 7.3.5. 求抛物線 $y^2=x$ 從 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的弧長。

例 7.3.6. 求曲線 semicubical parabola $y^3=x^2$ 在 $(1,1)$ 到 $(8,4)$ 之間的弧長。

例 7.3.7. 討論橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之周長。

定義 7.3.8. 若平滑曲線 (smooth curve) C 的方程式是 $y=f(x)$, $a\le x\le b$, 則從 $(a,f(a))$ 爲起點的弧長函數 $s(x)$ 爲 $s(x)=\int_a^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}dt$, $x\in[a,b]$。

例 7.3.9. 曲線 $y=x^2-\frac{1}{8}\ln x$ 以 $P_0(1,1)$ 爲起點, 求弧長函數。

例 7.3.10. 一曲線 $y=f(x)$ 以 $(1,1)$ 爲起點, 到曲線上任一點 $(t,f(t))$ 所經過的弧長爲 $\int_1^t\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$, 求出所有可能的 $f(x)$。

7.4 旋轉面表面積(Surface Area for Revolution)

定義 7.4.1. (1) 若 $f(x)\ge 0$, 且在 $[a,b]$ 上連續可微, 將曲線 $y=f(x)$, $a\le x\le b$ 繞著 x-軸旋轉, 得一旋轉面 (surface of revolution), 其表面積 (surface area) 爲

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=\int 2\pi y ds。$$

(2) 若曲線爲 $x=g(y)$, $c\le y\le d$, 繞著 y-軸旋轉, 則表面積爲

$$S=\int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}dy=\int 2\pi x ds。$$

例 7.4.2. 求半徑爲 a 之球的表面積。

例 7.4.3. 將曲線 $y=\sqrt{4-x^2}$, $-1\le x\le 1$, 繞 x-軸旋轉, 求旋轉面表面積。

例 7.4.4. 將拋物線 $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ 的弧繞 y-軸旋轉, 求旋轉面表面積。

例 7.4.5. 曲線 $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, 繞 x-軸旋轉, 求旋轉面表面積。

例 7.4.6. 星狀線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 繞 x-軸旋轉, 求旋轉面之表面積。

例 7.4.7. 在曲線 $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 3$ 上有一堵圍牆, 在每一點 (x, y) 之高度為 y, 求圍牆的面積。

例 7.4.8. (Gabriel horn) 將 $y = \frac{1}{x}, x \geqslant 1$ 繞 x 軸旋轉, 求

(1) 旋轉體體積,

(2) 旋轉體表面積。

7.5 力矩與質心 (Moments and Center of Mass)

定義 7.5.1. 假設一區域 R 是在 $y = f(x)$, x-軸, $x = a$ 及 $x = b$ 之間, $y = f(x)$ 及密度 $\rho(x)$ 是連續函數 。則

(1) 質量 (mass) 為 $m = \int_a^b f(x)\, \rho(x) dx$;

(2) 對 x-軸的力矩 (一次距,moment) 為 $M_x = \int_a^b \frac{1}{2} (f(x))^2 \rho(x) dx$, 對 y-軸的力矩為 $M_y = \int_a^b x f(x)\, \rho(x) dx$;

(3) 質心 (center of mass) 為 $(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x f(x)\rho(x)dx}{\int_a^b f(x)\rho(x)dx}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\rho(x)dx}{\int_a^b f(x)\rho(x)dx}$。

(4) 若密度為常數, 則質心為形心 (centroid)。

例 7.5.2. 長 l 公尺之細桿, 其密度在長 x 處為 $\delta(x) = kx$, 求其質心。

例 7.5.3. 求半徑為 r 之半圓的形心 。

例 7.5.4. 求半徑為 r 之半圓盤 (disk) 的形心 。

例 7.5.5. 一薄片置於平面上 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 的區域, 其密度為 ky。求質心。

例 7.5.6. 一個梯形四頂點為 $(0,0), (1,0), (1,2), (0,1)$, 求其形心 。

例 7.5.7. 一個半徑為 a, 圓心在原點的圓盤, 在 (x, y) 處的密度是 $\delta = k(2a + x)$, 求其質量。

例 7.5.8. 求 $y = x^2$ 及 $y = x$ 所圍區域的形心。

例 7.5.9. 一個底半徑為 R, 高為 H 的直圓柱體, 在高為 h 處之密度為 $\delta = \delta_0(1 + h)\mathrm{g/cm}^3$, 求其質量。

例 7.5.10. 一個半徑為 R 的星球, 在距圓心 r 處之密度為 $\delta = \frac{\delta_0}{1+r^2}\mathrm{kg/m}^3$, 求其質量。

例 7.5.11. 求半徑為 R 之半球體, 在距離底之高度為處為 $\delta = kz$, 求其質心。

例 7.5.12. 區域 R 是由 $y = 4 - x^2$ 及 x-軸在第一象限所圍成, 將其繞 y-軸旋轉, 求旋轉體的形心。

例 7.5.13. 一條電線形狀是圓弧 AB (如圖)。
(1) 求其質心。
(2) 其質心到弦 AB 的距離為 d, 證明 $\frac{d}{h} = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$。
(3) 證明 $\lim_{\alpha\to 0} \frac{d}{h} = \frac{2}{3}$。

7.6 Pappus 定理

定理 7.6.1. (體積的 Pappus 定理) 一個平面區域繞一直線 L 旋轉, 其中 L 不通過該區域的內點。則旋轉體體積爲 $V = 2\pi\rho A$, 其中 A 爲區域面積, ρ 爲形心到旋轉軸的距離。

定理 7.6.2. (表面積的 Pappus 定理) 一個平滑曲線繞平面一直線 L 旋轉,L 不通過該曲線的內點。則旋轉面表面積爲 $S = 2\pi\rho\ell$, 其中 ℓ 爲曲線長, ρ 爲曲線形心到旋轉軸的距離。

例 7.6.3. 將半徑爲 a 的圓繞一直線 L 旋轉, L 與圓心距離爲 b $(b \geq a)$, 得一環狀體 (torus)。
(1) 求環狀體體積, (2) 求環狀面表面積。

例 7.6.4. 利用 Pappus 定理, 求半圓 $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ 及半圓周 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 的形心。

7.7 機率 (Probability)

定義 7.7.1. (1) 某種事件的結果是屬於一個實數區間。此數值稱爲連續隨機變數 X (continuous random variables), 每一個隨機變數 X 都有一個機率密度函數 $f(x)$ (probability density function) 。則 X 在 $[a, b]$ 之間的機率爲 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$。
它要滿足 $f(x) \geq 0\ \forall x$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$。

(2) 一個 pdf 的中值 median 是數值 m 滿足 $\int_m^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$。

(3) X 的平均值 (mean) 或期望值 (expectation) 定義爲 $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$。

(4) X 的函數 g 之期望值爲 $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$。

(5) X 的變異數 (variance) 定義爲 $\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$。

(6) X 的標準差爲 $\sigma = \sqrt{(}Var(X))$。

註 7.7.2. $\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$ 。

例 7.7.3. 令 $f(x) = 0.006x(10-x)$, $0 \leq x \leq 10$, 驗證它是 pdf, 並求 $P(4 \leq x \leq 8)$。

例 7.7.4. 若 X 是 $[a, b]$ 上的均勻分佈 (uniform distribution), 求 μ 及 σ, 並求 $\Pr(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ 。

例 7.7.5. 若 X 是 $[0, \infty)$ 上的指數分佈 (exponential distribution), 即 $f(x) = ke^{-kx}$, 求 μ 及 σ, 並求 $\Pr(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ 。

例 7.7.6. 等候時間通常是以指數分佈爲模式。一個顧客電話的等候時間的平均值是 5 分鐘。
(a) 求在一分鐘內接電話的機率。
(b) 求超過五分鐘接電話的機率。

例 7.7.7. 一個 pdf 滿足 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 稱爲正規分佈 (normal distribuction), μ 爲平均值, σ 爲標準差 (standard deviation)。

例 7.7.8. 若 Z 是標準正規分佈, 即 $\mu = 0, \sigma = 1$, 求 $\Pr(-1.2 \leq Z \leq 2.0)$, $\Pr(Z \geq 1.5)$ 。

例 7.7.9. 若 X 是正規分佈, 即 $\mu = 2, \sigma = 0.4$, 求 $\Pr(1.8 \leq X \leq 2.4)$, $\Pr(X \geq 2.4)$ 。

例 7.7.10. IQ 分數是正規分佈, 平均值是 100, 標準差是 15。
(a) IQ 分數在 85 到 115之間的百分比是多少?
(b) 超過 140分的人數百分比爲何?

7.8 微分方程 (Differential Equations)

可離微方 (Separable Differential Equations)

定義 7.8.1. 一個微方 $y' = f(x,y)$ 如果可以寫成 $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ 的形式, 則稱爲可離微方 (separable equation)。

例 7.8.2. 解 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$。

例 7.8.3. 解 $\frac{dy}{dx} = x^2y^3, \quad y(1) = 3$。

例 7.8.4. 解 $\frac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x$。

例 7.8.5. 解 $y' = x^2y$。

例 7.8.6. 解微分方程 $\sqrt{x}\ \frac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}$, 且 $y(0) = 0$。

例 7.8.7. 解 $y(x) = 3 + 2\int_1^x ty(t)dt$。

例 7.8.8. 一容器內有 1000 L 鹽水, 其中有 50 kg 鹽。將含鹽 10 g/L 之鹽水以 10 L/min 之速率倒入容器, 並隨時加以 攪拌, 且以 10 L/min 之速率流出。問 40 分鐘後含鹽多少 ?

例 7.8.9. 化學反應中, 起初有 A 物質 a mol/cm^3, B 物質 b mol/cm^3。在時間 t 產生 C 物質 $x(t)$ mol/cm^3, 則其滿足微方 $\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$ 。試解此微方。

例 7.8.10. 求一曲線族, 使每一曲線均與 $y = Cx^2$ 正交。

例 7.8.11. 一曲線通過 $(3,2)$, 且曲線上每一點之法線的 y-截距均爲 6, 求該曲線的方程式。

一階線性微方 (First-Order Linear Differential Equations)

定義 7.8.12. $\frac{dy}{dx} + p\,(x)\,y = q\,(x)$ 稱爲一階線性微方 (first-order linear differential equation), 其中 $p\,(x)$,$q\,(x)$ 爲連續函數。

7.8.13. (1) 積分因子法 (Integration Factor): 兩側都乘上積分因子 $e^{\mu(x)}$, 並加以積分。

(2) 參數變動法 (Method of variation of parameters): 假設相應齊次微方之解爲 $Ke^{-\mu(x)}$, 現假設此微方 之解爲 $k(x)e^{-\mu(x)}$。

例 7.8.14. 解 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1,\ x > 0$。

例 7.8.15. 解 $\frac{dy}{dx} + xy = x^3$。

例 7.8.16. 解 $L\frac{dl}{dt} + RI = V,\ I(0) = 0$, 求 $\lim\limits_{t \Rightarrow \infty} I(t)$。

例 7.8.17. 解 $x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y,\ x > 0$。

例 7.8.18. 解 $x^2y' + xy = 1$,$x > 0$,$y\,(1) = 2$。

例 7.8.19. 解 $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$。

例 7.8.20. 解微分方程 $(x+1)\frac{dy}{dx} - 2(x^2+x)y = \frac{e^{x^2}}{x+1}$。

例 7.8.21. 在銀行以 A元開戶, 以年利率 $100R\%$ 的連續複利計息, 同時連續的在 t (年) 將 $(Ct+D)$ 元存入。求 t 年的 本利和。