第 5 章

積分 (Integrations)

目錄

1. 由求面積的想法引入定積分的概念。
2. 定義定積分。
3. 介紹微積分基本定理。
4. 介紹定積分的第一個基本技巧-變數變換。

5.1 面積的估計

面積的定義

定義 5.1.1. (1) 令 $f(x)$ 爲 $[a,b]$ 上的非負函數。則 $x=a$, $x=b$, x-軸及 $y=f(x)$ 之圖形所圍的區域, 稱爲在 $f(x)$ 之圖形下, 從 $x=a$ 到 b 的區域。

(2) 將 $[a,b]$ 分爲 n 個子區間 (subinterval) $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$, 其中 $x_0=a$, $x_n=b$, 稱爲一個分割 (partition), 我們記爲分割 $\mathcal{P}=\{x_0=a,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n=b\}$。我們有時將 $\mathcal{P}$ 視爲 $n+1$ 個點的集合。

(3) 若子區間的長度相等, 即 $\forall i, |x_i-x_{i-1}|=\frac{b-a}{n}$, 我們稱 $\mathcal{P}$ 爲正規分割 (regular partition)。

5.1.2. (1) 任給 $[a,b]$ 上的分割 $\mathcal{P}$, 在子區間 $[x_{i-1},x_i]$ 上取 $f(x)$ 的極大値爲 $f(v_i)=M_i$, 極小値爲 $f(u_i)=m_i$。以 $[x_{i-1},x_i]$ 爲底, M_i 爲高得一矩形, n 個矩形形成外接矩形多邊形 (rectangular polygon circumscribed about R), 面積爲

$$C(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i-x_{i-1})。$$

(2) 同樣的, 取 m_i 則得內接矩形多邊形 (rectangular polygon inscribed in R), 面積爲

$$I(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1})。$$

(3) 顯然對任意分割 $\mathcal{P}_1$ 及 $\mathcal{P}_2$, 得到 $I(\mathcal{P}_1) \leq I(\mathcal{P}_2)$。

(4) 令

$$\mathcal{L} = \{I(\mathcal{P}) | \mathcal{P} \text{ 爲 } [a,b] \text{ 之分割}\},$$
$$\mathcal{U} = \{C(\mathcal{P}) | \mathcal{P} \text{ 爲 } [a,b] \text{ 之分割}\}。$$

則 $\mathcal{L}$ 及 $\mathcal{U}$ 分別有上界及下界。由實數的完備性, 存在 $A_l = \text{l.u.b.}\mathcal{L}$ 及 $A_u = \text{g.l.b.}\mathcal{U}$, 且 $A_l \leq A_u$。

[註]

(1) 令 $S \subset \mathbb{R}$, 若對所有 $x \in S$ 均有 $x \geq a$, 則稱 a 爲 S 的下界: 若對所有 $x \in S$ 均有 $x \leq b$, 則稱 b 爲的上界。

(2) 若 c 是 S 的下界, 且沒有比 c 大的下界, 則稱 c 爲最大下界 (great lower bound, 簡記爲 glb)。同樣, 若 d 爲 S 的上界, 且沒有更小的上界, 則稱 d 爲最小上界 (least lower bound, 簡記爲 lub)。

(3) (完備性公設) 任意 $\mathbb{R}$ 的子集 S, 若有下界, 必有最大下界; 若有上界, 則必有最小上界。

定義 5.1.3. 若 $A_l = A_u$, 則定義 $y = f(x)$ 之下從 a 到 b 的區域 R 面積爲 $A(R) = A_l = A_u$。

<u>例題</u>

例 5.1.4. 求在直線 $y = x + 1$ 下方, 且在 x-軸上方, 介於 $x = 0$ 與 $x = 2$ 之間的區域面積 。

例 5.1.5. (1) 利用矩形面積估計在 $x = 0$ 到 $x = 1$ 之間, 拋物線 $y = x^2$ 下的面積。(分別利用上和 u_n、下和 L_n 及中點和 M_n。)

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$、$\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$。

例 5.1.6. 令 $b > a > 0$, 且 k 爲 $\neq 1$ 的任意實數。求在直線 $y = x^k$ 下方, 且在 x-軸上方, 介於 $x = a$ 與 $x = b$ 之間的 區域面積 。

例 5.1.7. 將極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \Sigma_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2}$ 表爲面積, 並求其值。

例 5.1.8. 如果車子的里程表壞了, 而速度表記錄每 5 秒鐘的速率 (km/h) 如下:

時間	0	5	10	15	20	25	30
速率	27	34	38	46	51	50	45

則這 30 秒所走的距離大約多少?

5.2 定積分 (Definite Integrals)

定積分的定義

5.2.1. (1) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函數, 類似於上述定義, 對分割 $\mathcal{P}$, 取 M_i 及 m_i 分別爲 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的極大、極小值, 則

$$S(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

稱爲 $f(x)$ 對分割 $\mathcal{P}$ 的下和 (lower sum);

$$T(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

稱爲 $f(x)$ 對分割 $\mathcal{P}$ 的上和 (upper sum)。顯然 $S(\mathcal{P})\le T(\mathcal{P})$。

(2) 將分割視爲點集合, 若 $\mathcal{P}\supset\mathcal{P}'$, 則稱 $\mathcal{P}'$ 爲 $\mathcal{P}$ 的加細 (refinement)。此時 $S(\mathcal{P})\le S(\mathcal{P}')$ 且 $T(\mathcal{P}')\le T(\mathcal{P})$。

(3) 若 f 爲有界函數, 且 $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ 爲任意分割, 則 $S(\mathcal{P}_1)\le T(\mathcal{P}_2)$。

定義 5.2.2. (1) 若 f 爲 $[a,b]$ 上的有界函數, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\{S(\mathcal{P})|\mathcal{P} \text{ 爲 } [a,b] \text{ 之分割}\},\\ \mathcal{U}&=\{T(\mathcal{P})|\mathcal{P} \text{ 爲 } [a,b] \text{ 之分割}\}。\end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ 及 $\mathcal{U}$ 均爲有界。則 $\mathcal{L}$ 之最小上界稱爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上之下積分 (lower integral), 記爲 $\overline{\int}_a^b f(x)dx$, 最大下界稱爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上之上積分 (upper integral), 記爲 $\underline{\int}_a^b f,dx$。

(2) 若 $\underline{\int}_a^b f(x)dx=\overline{\int}_a^b f(x)dx$, 則稱 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分 (integrable), 其積分值爲該共同值, 記爲 $\int_a^b f(x)dx$。

Riemann 和

定義 5.2.3. (1) 若 $f(x)$ 爲 $[a,b]$ 上的可積函數, $\mathcal{P}$ 爲任一分割。任取 $z_i\in[x_{i-1},x_i]$, 令 $R(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i-x_{i-1})$, 則 $R(\mathcal{P})$ 稱爲 $f(x)$ 的一個 Riemann 和。

(2) 任給一個分割 $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\}$。令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, 則 $\mathcal{P}$ 的範數 (norm) 定義爲 $\|\mathcal{P}\|=\max\{\Delta x_i\}$。

定理 5.2.4. 若 $f(x)$ 爲可積, $R(\mathcal{P})$ 爲對應於 $\mathcal{P}$ 的任一 Riemann 和, 則

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} R(\mathcal{P})=\int_a^b f(x)dx。$$

推論 5.2.5. 令 $\mathcal{P}_n$ 爲 $[a,b]$ 上的 n 等分正規分割, 則

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x。$$

註 5.2.6. (1) 定積分記爲 $\int_a^b f(x)dx$, 其中 $\int$ 爲積分符號, a 爲積分下限 (lower limit of integration), b 爲積分上限 (upper limit of integration), $f(x)$ 爲被積分式 (integrand), x 爲積分變數 (variable of integration)。

(2) 積分式中的 x 爲啞變數 (dumming variable), 即定積分記爲 $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b f(t)dt$ 或 $\int_a^b f(u)du$ 均相同。

(3) 若 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積且爲非負值, 則在 $[a,b]$ 上, 曲線 $y = f(x)$ 之下方的面積爲 $A = \int_a^b f(x)dx$; 若 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積且爲非正值, 則在 $[a,b]$ 上, 曲線 $y = f(x)$ 之下方的面積爲 $A = -\int_a^b f(x)dx$。

例 5.2.7. 令 $D(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ,x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 則 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可積分。

定義 5.2.8. (1) 令 $c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ 爲有限個實數, 函數 $f(x)$ 在 $[c_0, c_n]$ 上, 除了 $c_i, 0 \le i \le n$ 中某些 點以外均有定義。假設對每個區間 $[c_{i-1}, c_i]$ 均有連續函數 F_i, 且在 (c_{i-1}, c_i) 上 $f(x) = F_i(x)$, 則稱 $f(x)$ 爲 逐段連續。

(2) 在此情況下, 定義積分爲 $\int_{c_0}^{c_n} f(x)dx = \Sigma_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)dx$。

定理 5.2.9. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續或逐段連續函數, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分。

例 5.2.10. 求 $\int_1^3 e^x dx$。

例 5.2.11. 利用面積求 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$。

例 5.2.12. 利用面積求 $\int_0^3 (x-1)dx$。

例 5.2.13. 令 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \le 2 \\ x-2 & 2 < x \le 3, \end{cases}$, 求 $\int_0^3 f(x)dx$ 。

例 5.2.14. 將極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \Sigma_{i=1}^n \frac{2}{n}(1+\frac{2i-1}{n})^{1/3}$ 表爲積分式

5.3 積分性質 (Properties of Definite Integrals)

註 5.3.1. 當 $a > b$ 時, 我們仍可利用 Riemann 和定義定積分 $\int_a^b f(x)dx$, 但此時 $\Delta x_i < 0$。

性質 5.3.2. (積分性質) 假設函數 f 及 g 在 $[a,b]$ 及 $[b,c]$ 上均可積分, 且 k 爲一常數, 則

(1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$。

(2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$。

(3) $\int_a^a f(x)dx = 0$。

(4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$。

(5) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$。

(6) 若 f 在 $[a,b]$ 有極大值 M, 有極小值 m, 則 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$。

(7) 若在 $[a,b]$ 上, $f(x) \geq g(x)$, 則 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$。

(8) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ 。

例 5.3.3. 已知 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5, \int_1^4 f(x)dx = -2, \int_{-1}^1 g(x)dx = 7$。求:

(1) $\int_4^1 f(x)dx$;

(2) $\int_{-1}^1 (2f(x)+3g(x))\,dx$;

(3) $\int_{-1}^4 f(x)dx$。

例題

例 5.3.4. $\int_2^6 (2x-6+\sqrt{-x^2+8x-12})dx$

例 5.3.5. $\int_{-\sqrt{3}}^{\pi} (|2x-1| + \lfloor x \rfloor)dx$

例 5.3.6. 證明 $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx \leq \frac{3}{2}$。

例 5.3.7. 證明 $\frac{9}{13} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \leq \frac{23}{26}$。

例 5.3.8. 將極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$ 表爲定積分的形式。

例 5.3.9. 將極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{n+2}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{n+4}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n+2n}{n}\right)^2}\right]$ 表示爲定積分的形式。

例 5.3.10. 設 $a<b$, 求 a,b 使得 $\int_a^b (x^4-2x^2)dx$ 爲最小值。

函數的平均值

定義 5.3.11. 若 f 在 $[a,b]$ 上可積, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 平均值(average value, mean value) 定義爲 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。

定理 5.3.12. (積分的平均值定理, Mean Value Theorem for Definite Integral) 若 f 在 $[a,b]$ 上連續, 則必存在 $c \in [a,b]$, 使得 $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。

例 5.3.13. 求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在 $[0,2]$ 上的平均值, 並指出在那一點的函數值等於該值?

例 5.3.14. 證明: 若 f 在 $[a,b]$ 上連續, 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 則 f 在 $[a,b]$ 上必有一點取值爲 0。

5.4 微積分基本定理 (Fundemrntal Theorem of Calculus)

例 5.4.1. 令 $f(x)$ 如圖, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$。求 $g(0)$、$g(1)$、$g(2)$、$g(3)$、$g(4)$ 及 $g(5)$, 並作 $g(x)$ 的略圖。

定理 5.4.2. (微積分基本定理 Fundamental Theorem of Calculus, 第一部份) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 且令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 則 $F(x)$在 $[a.b]$ 上連續, 且 $F(x)$ 在 (a,b) 上 可微, 則 $F'(x)=f(x)$。即 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$。

例 5.4.3. 以下各導函數:

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$,

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^5 3t\sin t dt$,

(3) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t dt$,

(4) $\frac{dy}{dx}\int_{1+3x^2}^{\ln x} \frac{1}{2+e^t}dt$,

(5) $\frac{d}{dt}\int_a^x \sin(t^2)dt$,

(6) $\frac{d}{dx}\int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx$,

(7) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\tan^{-1}x} e^{t^2}dt$ 。

例 5.4.4. 求 $x^2\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}dt$ 之導函數。

例 5.4.5. 令 $f(\theta)=\int_{\theta^2}^{\cos\theta}\sin(t^2)dt$, 求 $f'(\theta), f''(\theta)$。

例 5.4.6. 若 $\int_0^{x^2} f(t)dt=x\sin\pi x$, 求 $f'(9)$。

例 5.4.7. $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\sec t-1)dt}{x^3}$

定理 5.4.8. (微積分基本定理第二部份, 或求值定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 且 F 爲 f 的任一反導函數 , 則 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

例 5.4.9. 求 $\int_1^3 e^x dx$。

例 5.4.10. 求 $\int_3^6 \frac{dx}{x}$。

例 5.4.11. 求曲線 $y=\cos x$ 從 $x=0$ 到 b 之下的面積。$(0\le b\le\frac{\pi}{2})$

例 5.4.12. 求 $F(k)=\int_0^1|x^2-kx|dx$ 的最小值 。

例 5.4.13. 下列計算有何錯誤? $\int_{-1}^3\frac{dx}{x^2}=\frac{x^{-1}}{-1}\mid_{-1}^3=-\frac{4}{3}$。

例 5.4.14. 解積分方程 $f(x)=2+\int_4^x f(t)dt$ 。

例 5.4.15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n\cos(\frac{j\pi}{2n})$ 。

5.5 不定積分 (Indefinite Integral)

定義 5.5.1. $f(x)$ 之所有反導函數所成的集合記爲 $\int f(x)dx$, 稱爲 $f(x)$ 對 x 的 不定積分 (Indefinite integral)。$\int$ 稱爲積分號 (integral sign), f 稱爲被積分式 (integrand), x 稱爲積分變數 (variable of integration)。

例 5.5.2. 求不定積分:

(1) $\int(x^2-2x+5)dx$,

(2) $\int \sec^2 x\tan x dx$。

<u>積分公式</u>

5.5.3. (1) $\int dx = x + C$

(2) $\int x^n dx = \int \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

(3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(6) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(7) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(8) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(9) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(10) $\int e^x dx = e^x + C$

(11) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln x} + C$

(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(13) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + C$

(14) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1} x + C$

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sinh^{-1} x + C$

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \cosh^{-1} x + C$

註 5.5.4. 當一個不定積分之公式給出時, 我們的共識是它只在一個區間上成立。例如 $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$ 表示: 若 $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, 其反導函數是 $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, & x < 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2, & x > 0 \end{cases}$。

例 5.5.5. 求以下各不定積分:

(1) $\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\, dx$,

(2) $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta$,

(3) $\int (5x^{3/5} - \frac{3}{x^2+2}) dx$,

(4) $\int (4\cos 5x - 5\sin 3x) dx$,

(5) $\int (\frac{1}{ex} - a^{\pi x}) dx$,

(6) $\int \frac{(x+1)^3}{x}$。

例 5.5.6. 求以下各定積分:

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sec x \tan x dx$,

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

(3) $\int_0^3 \left(x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$,

(4) $\int_1^9 \frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2} dt$。

5.6 變數變換 (Change of Variables)

例 5.6.1. $\int \sqrt{1+y^2} 2y dy$。

例 5.6.2. $\int \sqrt{4t-1} dt$。

定理 5.6.3. 若 $u = g(x)$ 爲可微函數, 其值域爲 I, 且 f 在 I 上連續, 則 $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$。

例 5.6.4. 求以下各積分:

(1) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$,

(2) $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$。

例 5.6.5. 求以下各積分:

(1) $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$,

(2) $\int \sqrt{1+x^2} x^3 dx$,

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$,

(4) $\int \frac{2z}{\sqrt[3]{z^2+1}} dz$,

(5) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx$。

例 5.6.6. 求以下各積分:

(1) $\int \cos(7\theta+5) d\theta$,

(2) $\int x^3 \cos(x^4+2) dx$,

(3) $\int \frac{\sin(3\ln x)}{x}dx$,

(4) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}dx$,

(5) $\int \frac{1}{\cos^2 2x}dx$。

例 5.6.7. 求以下各積分:

(1) $\int e^{5x}dx$,

(2) $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$,

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$,

(4) $\int x^2 e^{x^3}dx$,

(5) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$,

(6) $\int \frac{\ln x^2}{x}dx$。

例 5.6.8. 求以下各積分:

(1) $\int \sin^2 x dx$,

(2) $\int \cos^2 x dx$,

(3) $\int \sin^3 x dx$,

(4) $\int \cos^3 x dx$,

(5) $\int \tan x dx$,

(6) $\int \sec x dx$。

定理 5.6.9. 若 g' 在 $[a,b]$ 上連續, f 在 g 之值域上連續, 則 $\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx = \int_{g(b)}^{g(a)} f(u)du$。

例 5.6.10. 求以下各定積分:

(1) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$,

(2) $\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$,

(3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot\theta\csc^2\theta d\theta$,

(4) $\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$,

(5) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$。

例 5.6.11. 求一函數 $y=f(x)$ 定義在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上, 其導函數爲 $\frac{dy}{dx}=\tan x$, 且滿足 $f(0)=5$。

例 5.6.12. 解微分方程 $y'=\sec x, y(0)=4$。

例 5.6.13. 設 f 在 $[-a,a]$ 上連續。
(1) 若 f 爲偶函數, 則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$。
(2) 若 f 爲奇函數, 則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$。

例 5.6.14. $\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx$

例 5.6.15. $\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx$

例 5.6.16. 若 $\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sec^2 2x\tan 2x$, 且 $y'(0)=4, y(0)=1$, 求 $y(x)$。

例 5.6.17. 證明: $\int_{x}^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_{1}^{y} \frac{1}{t}dt$ 。

例 5.6.18. 證明: $y = \frac{1}{a}\int_{0}^{x} f(t)\sin a(x-t)dt$ 滿足 $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x), y'(0) = y(0) = 0$。

例 5.6.19. 證明: $\int_{0}^{x}(\int_{0}^{u} f(t)dt)du = \int_{0}^{x} f(u)(x-u)du$。

5.7 面積 (Areas)

定理 5.7.1. (1) 曲線 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 在 $x = a$ 及 $x = b$ 之間的面積是 $A = \int_{a}^{b} |f(x) - g(x)|\, dx$。

(2) 若 $f(y) \geq g(y)$, $\forall\ c \leq y \leq d$, 且 $f(y)$, $g(y)$ 爲連續, 則 $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$, $y = d$ 之間所圍的區域面積爲 $A = \int_{c}^{d} |f(y) - g(y)|\, dy$。

例 5.7.2. (1) 求位於 x-軸之上, 且位於曲線 $y = 3x - x^2$ 之下的區域面積。

(2) 求 x-軸與 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ 之圖形間, 在 $-1 \leq x \leq 2$ 上所圍的面積。

(3) 求圖形 $y = \sin^2 x$ 與 x-軸之間在 $[0,\pi]$ 上的面積。

(4) 求介於 $y = (2+\sin\frac{x}{2})^2\cos\frac{x}{2}$,$x$-軸, $x = 0$, 及 $x = \pi$ 之間的區域面積。

例 5.7.3. (1) 一區域以 $y = e^x$ 爲上界, 以 $y = x$ 爲下界, 且兩側邊界爲 $x = 0$, $x = b$。求其面積。

(2) 求位於 $y = 1$ 之上, 且位於曲線 $y = \frac{5}{x^2+1}$ 之下的區域面積。

(3) 求位於曲線 $y = x^2 - 2x$ 與 $y = 4 - x^2$ 之間 的區域面積。

(4) 求位於曲線 $x = y^2 - 12$ 右側, 且位 $y = x$ 之左側 的區域面積。

(5) 求直線 $y = x - 1$ 及拋物線 $y^2 = 2x + 6$ 所圍的區域面積。

(6) 求位於曲線 $y = \sin x$ 與 $y = \cos x$ 之間, 從 $x = 0$ 到 $x = 2\pi$ 的區域面積。

例 5.7.4. 求在第一象限中, 以 $y = \sqrt{x}$ 爲上界, 以 x 軸及 $y = x - 2$ 爲下界之區域面積。(以三種不同的方法解之)

例 5.7.5. 令 $y = x^2$ 與 $y = 4$ 所圍成的區域爲 R, 直線 $y = c$ 將其分爲等面積的兩部分, 求 c 之值。

例 5.7.6. 在第一象限中, 一區域左側以 y-軸爲界, 下側以 $x = 2\sqrt{y}$ 爲界, 上左側以 $x = (y-1)^2$ 爲界, 上右側以 $x = 3 - y$ 爲界, 求此區域面積爲何?

例 5.7.7. 令 R 爲拋物線 $y = x^2$ 與 $y = a^2$ 所圍成的區域, S 爲以 $(a,a^2), (-a,a^2), (0,0)$ 爲頂點之三角形 。當 $a \to 0$ 時, R 之面積與 S 之面積的比值之極限爲何?