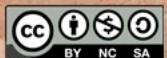




邏輯

Unit 4 古典邏輯語意學

傅皓政 老師



本著作除另有註明外，採取創用 CC 「姓名標示—非商業性—相同方式分享」台灣 3.0 版授權釋出



4.1 語意學

- 語意學：某個語言中符號所代表的意義，或者說是對這些符號的解釋。

1

單稱語詞

singular terms

指涉對象就是其語意值。

2

通稱語詞

general terms

滿足該語詞性質的對象形成之集合。

3

語句

真假值 (truth-value)。



4.2 古典邏輯語意學預設

1

二值原則
principle of
bivalence

2

真值函映
原則
truth-
functional
principle

3

外延原則
extensional
principle



二值原則 principle of bivalence

命題具有真假值。即命題或者為真，或者為假，但不能既真又假，且不能既不真也不假。

- 但是，有些語句的真假值是？
 - (a) 明天將會發生海戰
 - (b) 無臉男是千尋的好朋友

真值函映
原則
truth-
functional
principle

古典邏輯語言中出現的連接詞均為真值函映的連接詞，意即輸入的語句有真假值，則透過函映算子連結的語句也必定有真假值。

	命題		函映	結果
	P	Q		
真假值	真	真	\wedge	真
	真	假		假
	假	真		假
	假	假		假



■ 非真值函映的連接詞

- (a) I know that $P \Rightarrow KP$

	命題	函映	結果
	P		KP
真假值	真	K	?
	假		假



■ 非真值函映的連接詞

- (b) It is necessary that

$$P \Rightarrow \Box P$$

	命題	函映	結果
	P		$\Box P$
真假值	真	\Box	?
	假		假



■ 非真值函映的連接詞

- (b) It is possible that

$$P \Rightarrow \Diamond P$$

	命題	函映	結果
	P		$\Diamond P$
真假值	真	\Diamond	真
	假		?

外延原則 extensional principle

複合語句的真假值是由原子語句的真假值決定，與語句本身的內容或意義無關。

- 以矛盾句為例， $P \wedge \neg P$ 的真假值一定為假，無論 P 的內容為何。



4.3 連接詞的語意

- 根據二值原則，每個命題可能出現的情況有兩種，即「真 (T)」與「假 (F)」。因此，如果僅出現一個命題的語句，只需要考慮兩個可能情況，而出現兩個命題組成的語句，則須考慮 $2 \times 2 = 4$ 種情況。依此類推，出現 n 個命題的語句，則需要考慮 2^n 種可能情況。



否定號 (Negation)

在 P 為真的情況下， $\neg P$ 為假；而在 P 為假的情況下 $\neg P$ 為真。

P	$\neg P$
T	F
F	T

其他記號： \equiv \sim \neq \neg $\bar{\quad}$ $_$

選言號 (Disjunction)

只有在 P 和 Q 都為假的情況 $P \vee Q$ 為假；其他情況 $P \vee Q$ 都為真。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Clear

比較：互斥選言號 $\underline{\vee}$ (exclusive disjunction)

連言號 (Conjunction)

只有在 P 和 Q 都為真的情況 $P \wedge Q$ 為假；其他情況 $P \wedge Q$ 都為真。

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Clear

其他記號： \equiv & \equiv \cdot \equiv \boxtimes \equiv



條件號 (Conditional)

只有在 P 為真且和 Q 為假情況 $P \rightarrow Q$ 為假；其他情況 $P \rightarrow Q$ 都為真。

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Clear

其他記號： \supset 、 \Rightarrow



等值號 (Equivalence)

當 P 和 Q 語意值相同時 $P \leftrightarrow Q$ 為真；其他情況 $P \leftrightarrow Q$ 為假。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

其他記號： \equiv 、 \Leftrightarrow

Clear





4.4 恆真句

- 恆真句 (*tautology*)：考慮語句的所有可能情況，如果該語句在所有可能情況中均為真，若且唯若，該語句為恆真句。

- (a)

$$P \vee \neg P$$

- (b)

$$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

■ a.

$$P \vee \neg P$$

P	P	\vee	\neg	P
T	T	T	F	T
F	F	T	T	F

Clear

■ b.

$$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

P	Q	P	\rightarrow	$(Q$	\rightarrow	$P)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F

Clear



4.5 矛盾句

- 矛盾句 (*contradiction*)：考慮語句的所有可能情況，如果該語句在所有可能情況中均為假，若且唯若，該語句為矛盾句。

- (a) $P \wedge \neg P$

- (b) $\neg (P \rightarrow (Q \rightarrow P))$



■ a.

$$P \wedge \neg P$$

P	P	\wedge	\neg	P
T	T	F	F	T
F	F	F	T	F

Clear



■ b. $\neg (P \rightarrow (Q \rightarrow P))$

P	Q	\neg	$(P$	\rightarrow	$(Q$	\rightarrow	$P))$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F	T	F
F	F						

Clear





4.6 偶真句

- 偶真句 (*contingent*)：考慮語句的所有可能情況，如果該語句在某些可能情況中為真，其他可能情況中為假，若且唯若，該語句為偶真句。

- (a)

$$P \vee \neg Q$$

- (b)

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow P$$



■ a.

$$P \vee \neg Q$$

P	Q	P	\vee	\neg	Q
T	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F

Clear





■ b.

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow P$$

P	Q	$(P$	\rightarrow	$Q)$	\rightarrow	P
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F	F

Clear





4.7 句式之間的關係

1

蘊涵關係
implication

2

等值關係
equivalence

3

互不蘊涵
independent

1

蘊涵關係 implication

句式 ϕ 蘊涵（或者說「語意上蘊涵」）句式 ψ ，是指不會出現任何使得 ϕ 為真而 ψ 為假的情況；反之，若出現 ϕ 為真而 ψ 為假的情況，則句式 ϕ 不蘊涵句式 ψ 。

■ 記號： $\phi \models \psi$ ； $\phi \not\models \psi$



- 證明方法：若 $\varphi \rightarrow \psi$ 為恆真句，則 φ 蘊涵 ψ ；
若 $\varphi \rightarrow \psi$ 不是恆真句，則 φ 不蘊涵 ψ 。

- 範例：

$$P \wedge Q$$

；

$$P \vee Q$$

$P \wedge Q$

;

$P \vee Q$

P	Q	$P \wedge Q$	\rightarrow	$P \vee Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	F

Ans:

$P \wedge Q \models P \vee Q$

Clear

$P \wedge Q$

;

$P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$	\rightarrow	$P \wedge Q$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

Ans:

$P \vee Q \neq P \wedge Q$

Clear

2

等值關係 equivalence

對任意兩個句式 φ 與 ψ 而言， φ 與 ψ 等值，若且唯若 φ 語意上蘊涵 ψ 而且 ψ 語意上蘊涵 φ 。

■ 記號：

$$\models \varphi \leftrightarrow \psi$$



- 證明方法：若 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 為恆真句，則句式 φ 和句式 ψ 是等值的；若 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 不是恆真句，則句式 φ 和句式 ψ 是不等值的。

- 範例： $P \rightarrow Q$ ； $\neg P \vee Q$

$P \rightarrow Q$

;

$\neg P \vee Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$	\leftrightarrow	$\neg P \vee Q$
T	T	T	T	F T
T	F	F	T	F F
F	T	T	T	T T
F	F	T	T	T T

Ans:

$\models (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

Clear

3

互不蘊涵 independent

對任意兩個句式 φ 與 ψ 而言， φ 與 ψ 互不蘊涵，若且唯若 φ 不蘊涵 ψ 而且 ψ 不蘊涵 φ 。

■ 記號：

 $\varphi \not\equiv \psi$; $\psi \not\equiv \varphi$



■ 證明方法：見蘊涵關係證明方法

■ 範例： $P \rightarrow Q$ ； $P \vee Q$



■ $P \rightarrow Q$; $P \vee Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$	\rightarrow	$P \vee Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

Ans: $P \rightarrow Q \neq P \vee Q$

Clear



$P \rightarrow Q$

;

$P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$	\rightarrow	$P \rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

Ans:

$P \vee Q \neq P \rightarrow Q$

Clear





- 整合式證明方法：可同時將雙向蘊涵關係整合在同一個真值表中觀察。

■ 範例：

$$P \wedge Q$$

；

$$P \rightarrow Q$$

$P \wedge Q$

;

$P \rightarrow Q$

P	Q	$P \wedge Q$	\leftarrow	\rightarrow	$P \rightarrow Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	T

Ans:

$P \wedge Q \models P \rightarrow Q$

Clear





4.8 一群句式之間的關係

1

不一致

inconsistency

2

一致

consistency

1

不一致

inconsistency

- 對任意句式集合 Γ 而言， Γ 是不一致的，若且唯若沒有任何情況能夠使集合 Γ 中的所有句式為真。

- 記號： $\Gamma \models$



■ 證明方式：計算 Γ 中的所有句式的真假值， Γ 是不一致的，若且唯若，不存在 Γ 中的所有句式同時為真的情況。

■ 範例： $\Gamma: \{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \wedge \neg R\}$



P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	$P \wedge \neg R$
T	T	T	T	T	F F
T	T	F	T	F	T T
T	F	T	F	T	F F
T	F	F	F	T	T T
F	T	T	T	T	F F
F	T	F	T	F	F T
F	F	T	T	T	F F
F	F	F	T	T	F T

Clear

2

一致性 consistency

- 對任意句式集合 Γ 而言， Γ 是一致的，若且唯若至少有一個情況能夠使集合 Γ 中的所有句式為真。
- 記號： $\Gamma \#$



- 證明方式：計算 Γ 中的所有句式的真假值， Γ 是一致的，若且唯若，至少存在一個使得 Γ 中所有句式同時為真的情況。

- 範例： $\Gamma: \{P \vee Q, Q \vee R, P \rightarrow \neg R\}$



P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \vee R$	$P \rightarrow \neg R$
T	T	T	T	T	F F
T	T	F	T	T	T T
T	F	T	T	T	F F
T	F	F	T	F	T T
F	T	T	T	T	T F
F	T	F	T	T	T T
F	F	T	F	T	T F
F	F	F	F	F	T T

Clear



版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者 / 來源
1	1-46	投影片版型		中國文化大學 傅皓政