

# 第一章習題

## 方程式與平面曲線; 隱函數

1. 將列方程式局部改寫成「顯」函數，並寫出其定義範圍 (假設  $a, b > 0$ )

(1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(2)  $x^2 - xy + y^2 = 1$

2. 利用方程式圖形的對稱性，判斷下列取縣的對稱性。

(1)  $y = x^4 - x^2 + 1$

(2)  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(3)  $y^2 = 4x$

3. 若  $y = \lambda x + \alpha$  與  $y = \mu x + \beta$  對  $y = x$  對稱，且  $\mu, \lambda \neq 0$ 。說明  $\lambda \cdot \mu = 1$ 。

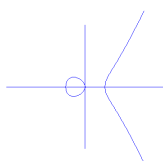
4. 辨認下列函數那些是奇函數？那些是偶函數？或都不是。

$y = \cos x, y = \tan x, y = x^4 - 1, y = \log x$ 。

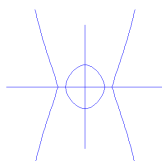
5 配合題：下列圖形對應於那些式子。

(1)  $y^2 = x^3 - x$       (2)  $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$

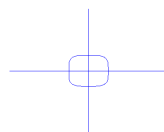
(3)  $x^4 + y^4 = 1$       (4)  $x^3 + y^3 = 1$



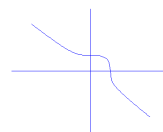
(a)



(b)



(c)



(d)

## 反函數

1. 下列那些函數是 1-1，那些不是？

(1)  $y = x^4 - 1$       (2)  $y = \sin x$

(3)  $y = \log(x^2 + 1)$       (4)  $y = 2^x - 2^{-x}$

2. 驗證

(1)  $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

(2)  $\cos^{-1}(x) + \cos^{-1}(-x) = \pi$

3. 驗證  $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$  在  $-1 \leq x \leq 0$  時，也是正確的。

4. 計算

(1)  $\sin^{-1} \sin(\frac{3}{4}\pi)$       (2)  $\sin \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$

(3)  $\sec \tan^{-1} x$       (4)  $\cos \csc^{-1} x$

## 連續函數與極限

### 1. 說明

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2+n} = 1 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+1}{n^2+n} = \infty \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+n} = 0$$

### 2. 求下列極限

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3-a^3}{x-a} \quad (2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{-2}-a^{-2}}{x-a}, a \neq 0 \quad (3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n-a^n}{x-a}, n \in \mathbb{Z}$$

### 3. 求下列極限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+1}{2x-1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{x-1}$$
$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin^2 2x \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} 2^{\sin(2 \tan^{-1} x)}$$

### 4. 求下列極限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^4-1} \quad (3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^3+x^2+8}+x}{x+2}$$
$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 2x}$$

### 5. 求下列極限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x-1}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x-1}{x^2}$$

### 6. 求下列極限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^3+1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$
$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\tan^{-1} x)$$

## e 與自然對數

1. 說明

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\lambda}} \frac{\ln x + \ln \lambda}{\lambda x - 1} = 1 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sec x}{\tan^2 x} = \frac{1}{2}$$

2. 設  $\lambda \in \mathbb{R}$ ，求下列極限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\lambda x} = e^\lambda \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^x = e^\lambda$$

「本章習題大部分選自《微積分乙》（臺大出版中心）」