第五章習題

多變數函數

1. 用截面法，畫出 $z = x - y^3$ 函數大致的圖形。

2. 續上題，試試看同時用兩個方向（ x 與 y ）去作圖，這對瞭解函數圖形應該更有幫助。

3. 畫出 $z = \sin y$ 函數的圖形。

4. 畫出 $z = (x^{\,2} + y^{\,2})^2 - x^{\,2} - y^{\,2}$ 函數的圖形。

5. 畫出 $f\,(x, y) = xy,\ C = -2, -1, 0, 1, 2$

多變數函數的微分

1. 求偏導數。

   (1) $f\,(x, y) = x^{\,y}$

   (2) $f\,(x, y) = \int_x^y \sin t^2\, dt$

   (3) $f\,(x, y) = \log_x y$

2. 求 $f\,(x, y, z) = \sin^{-1}(\frac{y-z}{x^2})$ 偏導數。

3. 求 $f\,(x, y) = e^{-xy}$ 在對應點 $(0, 1, 1)$ 的切面方程式。

多變函數之連鎖法則

1. 用連鎖法則計算下列問題

   (1) $z = e^{xy}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, 求 $\frac{dz}{dt}$？

   (2) $z = x^2 + y^2$, $x = u + v$, $y = u - v$, $u = \cos t$, $v = \sin t$，求 $\frac{dz}{dt}$？

2. $z = z\,(x, y)$, $x = x\,(u, v), y = y\,(p, q)$，求 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial p}$, $\frac{\partial z}{\partial q}$ 。

3. (隱函數微分)

   $f\,(x, y) = C$ 是一平面曲線，若 $f\,(x_0, y_0) = C$，且設在 (x_0, y_0) 附近 y 是 x 的函數：$y = y\,(x)$, 說明：

$$\frac{d\,y}{d\,x}\Big|_{x=x_0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

方向導數與梯度

1. 求在指定點及指定方向的方向導數。

   (1) $f\,(x, y) = x^3 - y^2$, 在 $(2, 2)$ 點，沿 $(3, 4)$ 方向。

   (2) $f\,(x, y, z) = \frac{y}{z} + \sin xz$, 在 $(\pi, 2, 2)$ 點，沿 $(2, 1, 3)$ 方向。

2. 求在指定點的切面方程式。

   $f\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$。

高階偏導數與泰勒展開式

1. 計算下列 $f\,(x, y)$ 之 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。

   (1) $f\,(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$。

   (2) $f\,(x, y) = y^{x}$。

2. 求 e^{x+y} 函數在指定點 $(1, 1)$ 的三階泰勒多項式。

極值測試與應用

1. 找出下列函數的候選點，決定其極值性質 (即使 $D = 0$)。

   (1) $x^3 - 3xy + y^3$ (2) $x\,e^{-(x^2+y^2)}$

2. 利用最小乘方法求滿足下列資料之最佳曲線。

   (1) $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(1, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$

   (2) $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$

Lagrange 乘子法

1. 在方程式 $x^2+y^2=1$ 限制下，求 $g\,(x,y)=x^2+xy+y^2$ 函數的極值。

2. 在 $x^2+y^2\leq 1$ 區域中，求 $g\,(x,y)=x\,e^{-(x^2+y^2)}$ 函數的最大、最小值。

3. 設 $a,\, b,\, c\in\mathbb{R},\, a,\, b,\, c$ 中有一不為 0，求在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上 $ax+by+cz$ 的極值。

4. 一曲面方程式為 $z=4x^2+y^2-1$，求 $(0,0,0)$ 到此曲面的最短距離。

5. 設商品 X,Y 可相互替代，效用函數為 $g\,(x,y)=x^{\,\alpha}+y^{\,\beta}$，

   其中 $0\leq\alpha,\beta<1,\, x,y>0$

   (1) 說明 $g\,(x,y)=C>0$ 滿足無差異曲線的要求。

   (2) 取 $(\alpha,\beta)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3}),\,(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\,(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ 三種情況，討論極值點條件與偏袒的問題。

「本章習題大部分選自《微積分乙》（臺大出版中心）」