

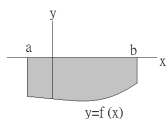
第三章習題

定積分

1. 計算下列函數在 $[a, b]$ 區間上的平均值：

$$(1) f(x) = c \quad (2) f(x) = x \quad (3) f(x) = x^2$$

2. 若 $f(x) < 0$, $x \in [a, b]$, 說明下圖之面積等於 $-\int_a^b f(x) dx$ 。



3. 設 $a > 0$, 說明

$$\frac{a}{1+a^2} \leq \int_0^a \frac{1}{1+x^2} dx \leq a$$

4. 如果在 $[a, b]$ 上, $m \leq f(x) \leq M$, 則 $m \leq \bar{f} \leq M$. (一函數的平均介於函數的最大、最小值之間。)

微積分基本定理

1. 用微積分基本定理計算下列定積分。

$$(1) \int_a^b x^3 dx \quad (2) \int_0^1 \sqrt{x} \quad (3) \int_1^2 \frac{1}{x}$$

$$(4) \int_0^\pi \cos x dx \quad (5) \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad (6) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2. 求下列函數的導函數

$$(1) \int_1^{\sin x} 3x^2 dx \quad (2) \int_0^{\tan^{-1} x} \sec^2 x dx$$

$$(3) \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sin(x^3) dx$$

基本積分技巧

1. 求 (1) $\int x^3 e^x dx$ (2) $\int x^4 e^x dx$ 。

2. 計算題

(1) $\int e^{2x} \sin x dx$ (2) $\int e^{2x} \cos x dx,$

3. 計算題

(1) $\int x^2 \sin x dx$ (2) $\int x^2 \ln x dx$

(3) $\int x^2 e^{-x} dx$

4. 計算 (1) $\int \sin^{-1} x dx$ (2) $\int \cot^{-1} x dx$

5. 計算題

(1) $\int x \sin(2x^2) dx$ (2) $\int \frac{1}{4+x^2} dx$

(3) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$

6. 計算題

(1) $\int x \sin(4-x) dx$ (2) $\int \frac{\tan^{-1} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

(3) $\int x \sec^{-1} x dx$

7. 計算題

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \tan x \sec^2 x dx$ (2) $\int_0^1 x^3(1+x^4)^3 dx$

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{4+3\cos x}} dx$

8. 計算題

(1) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$ (2) $\int \frac{1}{x^2(x^2-1)} dx$

(3) $\int \frac{x^4+x^2-1}{x^3+x} dx$

9. 計算題

$$(1) \int \sin x \cos^2 x dx \quad (2) \int \cos^6 x dx$$

$$(3) \int \tan x \sec^2 x dx$$

10. 計算題

$$(1) \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (2) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$$

11. 計算題

$$(1) \int \sqrt{1+x+x^2} dx \quad (2) \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \int \frac{1}{1+\sin x} dx$$

12. 說明在 m 為奇數或 n 為偶數的情況，可以直接將三角積分

$\int \tan^m x \sec^n x dx$ 化成有理函數的積分。

幾何度量

1. 求下列各曲線圍成區域的面積：

$$(1) x = y^2, x = y + 2 \quad (2) y = 2 \sin x, y = \sin 2x, 0 \leq x \leq \pi$$

2. 設 $(x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$ 。計算圓：

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ 之周長} = 2\pi r$$

3. 求下列區域對指定軸之旋轉體體積。

$$(1) y = x^2, y = 0, x = 2, x - \text{軸}$$

$$(2) y = x^2, y = 0, x = 2, y - \text{軸}$$

$$(3) y = x, y = -\frac{x}{2}, x = 2, y - \text{軸}$$

$$(4) x = \sqrt{y}, x = -y, y = 2, x - \text{軸}$$

4. 用圓盤法或殼形法證明直圓錐體體積公式： $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

重心

1. 設密度 $\rho(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1, n \geq 0$ ，請計算橫桿重心的公式，並說明當 n 越大，重心也會越來越靠近 1 點。

2. 求橫桿的重心

$$(1) \rho(x) = 1 + \frac{x}{3}, 1 \leq x \leq 3$$

$$(2) \rho(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, 1 \leq x \leq 4$$

3. 求下列各區域的重心。

$$(1) y = 0, y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(2) 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1$$

4. 利用 $\frac{1}{4}$ 的重心，求半圓的重心。

5. 已知橢圓： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之上半橢圓面積 $= \frac{1}{2}ab\pi$ ，繞 x -軸旋轉橢球體積 $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ，求上半橢圓的重心。

「本章習題大部分選自《微積分乙》(臺大出版中心)」