

第二章習題

導函數

1. 求下列式子。

$$(1) (x^3)' \quad (2) (4x^2 + 3x + 2)' \quad (3) \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$(4) \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)' \quad (5) \left(\frac{x^3+x}{x^2}\right)' \quad (6) \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'$$

2. 求下列函數在 $x = 1$ 的切線方程式。

$$(1) y = x^2 \quad (2) y = x^3 \quad (3) y = x + \frac{1}{x}$$

3. 說明 (t^2, t) 是 $y^2 = x$ 的參數式，求此曲線在 $t = -2$ 與 $t = 0$ 的切線方程式。

4. 由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 與導函數四則運算導出，下列式子：

$$(1) (\tan x)' = \sec^2 x \quad (2) (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(3) (\sec x)' = \sec x \tan x \quad (4) (\csc x)' = -\csc x \cot x。$$

5. 利用 $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ，證明一般的公式 $(\log_a x)' = \frac{1}{(\ln a)x}$

6. 計算下列函數之導函數：

$$(1) \frac{1}{1+x^3} \quad (2) \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \quad (3) \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$(4) \sec x \cdot \ln x \quad (5) \ln(2^x \cdot x^2) \quad (6) \frac{\log_2 x}{x^3}$$

連鎖法則與反函數的導數

1. 計算下列函數之導函數。

$$(1) \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2) \ln(\sqrt{x^2+1}+x) \quad (3) \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$
$$(4) \sin 2^x \quad (5) e^{\sin^{-1}x} \quad (6) \sqrt{1+\tan(x^2)}$$

2. 計算

$$(1) ((\sin x)^{\cos x})' \quad (2) (x^{\ln x})'$$

3. 利用對數微分計算導函數：

$$(1) \frac{(x-1)^3 \cdot \sqrt{(x^2+x+1)}}{(x+1)^5} \quad (2) \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$$

4. 求參數曲線在指定點的切線方程式：

$$(1) (\cos t, \sin t), t = \frac{2}{3}\pi \quad (2) \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \frac{e^t-e^{-t}}{2}\right), t = 1$$

$$(3) (\tan t, \sec t), t = \frac{\pi}{4}$$

高階導數與隱函數微分

1. 計算下列函數之二階導數。

$$(1) \frac{1}{1+x^2} \quad (2) \frac{\sin x}{1+\cos x} \quad (3) \ln(2^x x^2)$$

2. 求下列函數的所有高階導函數：

$$(1) \cos 2x \quad (2) e^{-x} \quad (3) \ln x$$

3. 利用隱函數微分求 $\frac{dy}{dx}$

$$(1) y^3 + xy^2 + x^2y - 2x^3 = 1 \quad (2) \sin(xy) = x + y$$

4. 求在指定點之一階導數與二階導數。

$$(1) \ln(x-y) = \frac{x}{y} - 1 \quad (2e, e)$$

$$(2) \tan^{-1} \frac{y}{x} = 2xy + y^2 \quad (1, 0)$$

平均值定理

1. 求下列不定積分

$$(1) \int \frac{1}{1+x^2} dx \quad (2) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad -1 < x < 1$$

$$(3) \int \sin x dx$$

2. 若已知車子由原點 $x = 0$ 出發，且速度函數 $v(t) = \sin t$,

$0 \leq t \leq \pi$ ，請問車子走到最遠 (離原點) 的距離。

($s(t)$ 是 $v(t)$ 的反導函數，且 $s(0)=0$)

3. 說明 $\ln(1+x) \leq x$, 其中 $x > -1$ 。

切線與線性逼近

1. 估計下列數值：

$$(1) \sqrt[3]{0.997} \quad (2) \ln 1.003 \quad (3) \tan^{-1} 1.03$$

2. 考慮半徑 R 的圓盤，若半徑相對

誤差為 $\lambda\%$ ，求面積的相對誤差？

應用：描述函數圖形

1. 若導函數 $f'(x)$ 等於下述函數，請說明原函數 $f(x)$ 遞增、遞減、極大值、極小值的範圍或位置。

(1) $x(x-1)(x+1)$ (2) $\frac{x(x-2)}{x-1}$

(3) $\tan^{-1} x$ (4) e^{-x^2}

2. 討論上題這些函數的凹性分布與反曲點位置。

3. 作圖題

(1) $y = 3x^7 - 4x^6 + 1$ (2) $y = x + \frac{1}{x^2}$

(3) $y = \frac{x(x-2)}{x-1}$ (4) $x^4 + y^4 = 1$

微分的應用-最佳化

1. 設計一鐵箱，為無上蓋，底為正方形之長方體，假設在容量固定為 4000 立方公尺的條件下，何時此鐵箱最輕？

2. 將一長方形，內接於圓 $x^2 + y^2 = 1$ ，說明當此長方形為內接正方形時面積最大。

3. 國內某航線月載顧客 10000 人，飛機票價 12000 元，公司希望調整票價，增加收益，但據市場調查票價每調高 10 元，會損失乘客 125 人。

(1) 請問該如何調整票價？

(2) 如果公司的載運容量上限是 12000 人，請問該如何調整票價？

「本章習題大部分選自《微積分乙》(臺大出版中心)」