第六章：多變數函數的積分

翁秉仁 教授

【本著作除另有註明，所有內容取材自作者翁秉仁教授所著作的微積分講義，採用 創用CC 姓名標示-非商業使用-相同方式分享 3.0 台灣 授權條款釋出】

Outline

二重積分

敘述：

研究雙變數函數積分的動機之一是計算體積，例：$z = f(x, y)$ 函數曲面下的體積。雙變數函數的積分稱為二重積分。x-y 平面上的積分範圍 Ω 稱為積分的區域。

二重積分：矩形區域

(i) 先討論積分區域 Ω：$[a, b] \times [c, d]$

其二重積分公式如下：

$$\int\int_{\Omega} f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy \,(\text{先橫加再縱加})$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \,(\text{先縱加再橫加})$$

二重積分：矩形區域-例子

例： $\int\int_{\Omega} (x^2 + xy)\, dA, \quad \Omega = [0,1] \times [-1,2]$

(1) 先橫加再縱加：

$$\int\int_{\Omega} (x^2 + xy)\, dA = \int_{-1}^{2} \left(\int_{0}^{1} (x^2 + xy)\, dx \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{y}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2} \right) dy = \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{4} \Big|_{-1}^{2} \right)$$

$$= \frac{7}{4}$$

二重積分：矩形區域–例子

(2) 先縱加再橫加：

$$
\begin{aligned}
\int\int_{\Omega}(x^2+xy)\,dA &= \int_0^1\left(\int_{-1}^2 (x^2+xy)\,dy\right)\,dx \\
&= \int_0^1\left(\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2}\right)\,dx \\
&= \int_0^1\left(3x^2+\frac{3}{2}x\right)\,dx = \left(x^3+\frac{3}{4}x^2\Big|_0^1\right) \\
&= \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

二重積分：一般區域

(ii) 一般的區域

把區域 Ω 用區間切割。

說明：

將區域最左邊的 x 值令為 a、最右邊的 x 值令為 b，最下邊的 y 值令為 c、最上邊的 y 值令為 d。

分割：將 $[a, b]$ 切割成 N 段，將 $[c, d]$ 切割成 M 段。

得：

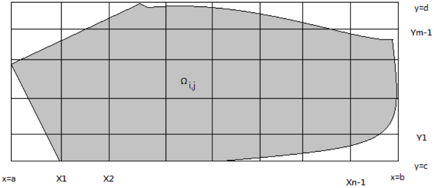
$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$， $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N}$

$y_0 = c < y_1 < y_2 < \cdots < y_{M-1} < y_M = d$， $\Delta y = y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{M}$

任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$，$(\xi_i, \eta_j)$ 是區域 $\Omega_{i,j}$ 中的一點。

二重積分：一般區域

分割如下圖所示。



所以每個灰色區域加總得到

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ \Omega_{i,j}\subset\Omega}}^{M,N} f(\xi_i,\eta_j)\cdot \Delta x \Delta y$$

二重積分：一般區域

切割越切越細，即 $N \to \infty,\ M \to \infty$

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ \Omega_{i,j}\subset\Omega}}^{M,N} f(\xi_i,\eta_j)\cdot \Delta x \Delta y \to \int\int_{\Omega} f(x,y)\,dA$$

二重積分

性質：

(1) $\int\int_\Omega \alpha f(x,y)\, dA = \alpha \int\int_\Omega f(x,y)\, dA$

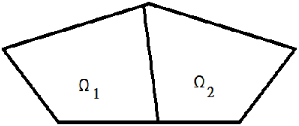
(2) $\int\int_\Omega \left(f(x,y) + g(x,y)\right)\, dA = \int\int_\Omega f(x,y)\, dA + \int\int_\Omega g(x,y)\, dA$

(3) 若 $f(x,y) \geq 0$, $\int\int_\Omega f(x,y)\, dA \geq 0$

(4) 若 Ω 是兩個區域 Ω_1, Ω_2 不重疊的聯集，即 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$，如下圖，則

$$\int\int_\Omega f(x,y)\, dA = \int\int_{\Omega_1} f(x,y)\, dA + \int\int_{\Omega_2} f(x,y)\, dA$$

cc BY NC SA



Outline

二重積分

Fubini 定理

二重積分的極座標形式

二重積分之變數變換

定理：(Fubini 定理)

(1) 若區域 Ω: $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq h(x)$，則

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right)\,dx$$

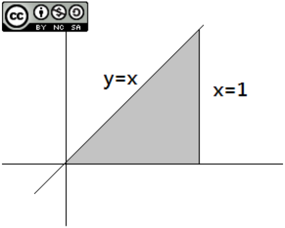
(2) 若區域 Ω: $c \leq y \leq d$, $k(y) \leq x \leq l(y)$，則

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{k(y)}^{l(y)} f(x,y)\,dx \right)\,dy$$

Fubini 定理應用 (1)

例 1： $\int\int_{\Omega} xy^2\, dA, \quad \Omega: y = x, x = 1, x$-軸圍成的區域。

區域圖形如下圖所示。



區域可表示為

$$\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\} \quad 或 \quad \{0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\}$$

Fubini 定理應用 (1)

解 (1)

$$\int\int_{\Omega} xy^2\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy^2\,dy\right)\,dx = \int_0^1 x\cdot\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^x\right)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^4}{3}\,dx = \frac{1}{15}\left(x^5\Big|_0^1\right) = \frac{1}{15}$$

解 (2)

$$\int\int_{\Omega} xy^2\,dA = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy^2\,dx\right)\,dy = \int_0^1 y^2\cdot\left(\frac{x^2}{2}\Big|_y^1\right)\,dy$$

$$= \int_0^1 y^2\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\,dx = \left(\frac{y^3}{6}-\frac{y^5}{10}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

Fubini 定理應用 (2)

例 2： $\displaystyle\iint_\Omega \sin x^2\, dA,\qquad \Omega: y=x, x=1, x$-軸圍成的區域。

$$\iint_\Omega \sin x^2\, dA = \int_0^1 \left(\int_y^1 \sin x^2\, dx\right)\, dy$$

$\int_y^1 \sin x^2\, dx$ 此積分算不出來，因為函數 $y=\sin x^2$ 無反導函數。

但是用另外一個區域表示積分，可以計算出來。

$$\iint_\Omega \sin x^2\, dA = \int_0^1 \left(\int_0^x \sin x^2\, dy\right)\, dx$$

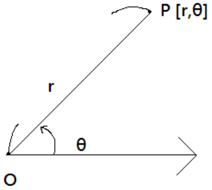
$$= \int_0^1 \sin x^2 \cdot x\, dx = \left(\frac{-\cos x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2}$$

Outline

極座標

極座標說明：

極座標與高中學到的複數極式，基本上是相同的座標約定，把原點稱為極點，x-軸的正向當作極軸的方向。如下圖要標定 P 點的極座標，由極軸出發測量 $\overline{OP}$ 與極軸的夾角 θ，在測量極點與 P 點的距離 r，則數對 $[r, \theta]$ 就是 P 點的極座標。

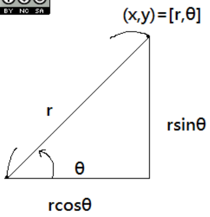


極座標

極座標關係式：

$$(A)\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$



雙變數函數的極座標表示

例： $f(x,y)=x^2+y^2$

說明：

設點 (x,y) 有極座標 $[r,\theta]$，利用極座標轉換式 (A) 得

$$x^2+y^2=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2$$

因此，$f(x,y)$ 如果用極座標來表示，變成 $f[r,\theta]$

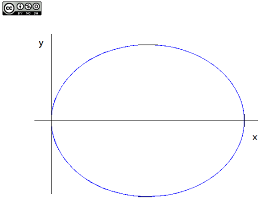
注意：

定義符號 $f[r,\theta]$，表示從極座標觀點的函數關係式，它與 $f(x,y)$ 的關係是

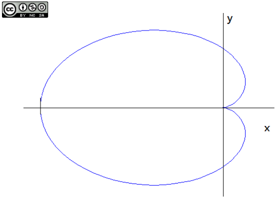
$$f[r,\theta]=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

以極座標表示的曲線

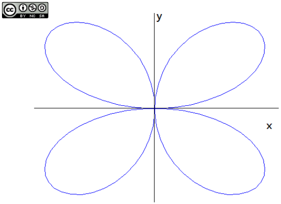
極座標定義的曲線 $r = f(\theta)$



(a) $r = \cos\theta$



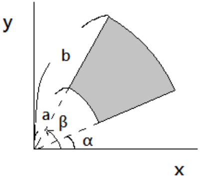
(b) $r = 1 - \cos\theta$



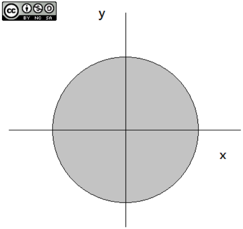
(c) $r = \sin 2\theta$

極座標區域

(1) $0 < a \le r \le b, \quad \alpha \le \theta \le \beta$，圖形如下。



(2) $0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$，圖形如下。



極座標二重積分

由前面二重積分了解到

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)\,dA \approx \sum_{\substack{i,j=1 \\ \Omega_{i,j}\subset\Omega}}^{M,N} f(\xi_i,\eta_j)\cdot \Delta x \Delta y$$

雙變函數改以極座標表示

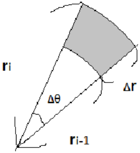
$$\int\int_{\Omega} f(x,y)\,dA \approx \sum_{\substack{i,j=1 \\ \Omega_{i,j}\subset\Omega}}^{M,N} f[\rho_i,\phi]\cdot A\left(\Omega_{i,j}\right)$$

極座標二重積分

如下圖，每一小塊分割面積 $A\left(\Omega_{i,j}\right)$，以極座標表示如下。

$$A\left(\Omega_{o,j}\right) = \frac{1}{2}{r_i}^2\left(\theta_j - \theta_{j-1}\right) - \frac{1}{2}{r_{i-1}}^2\left(\theta_j - \theta_{j-1}\right)$$

$$\approx r_{i-1} \cdot \left(\Delta r \Delta \theta\right)$$



因此，二重積分用極座標變數轉換，積分表示如下。

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)\,dA = \int\int f[r,\theta]\,r\,dr\,d\theta$$

極座標二重積分

例 1： 求心型線 $r = 1 - \cos\theta$ 的內部面積。

說明：

心型線內部用極座標描述得

$$\{\Omega\colon 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1 - \cos\theta\}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_{\Omega} 1\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos\theta)^2}{2}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{4} \right) d\theta \\
&= \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

極座標二重積分

例 2： $\displaystyle\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}\,dA,\ \Omega\colon x^2+y^2\le R^2$

說明：

若先用直角坐標計算，會發現不論積分順序，都受困於 $\int e^{-x^2}\,dx$ 而失敗。利用極座標，$\Omega\colon 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le R$，則

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}\,dA &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-r^2}\,r\,dr\right)d\theta\\ &= 2\pi\cdot\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-R^2}}{2}\right)\\ &= \pi\left(1-e^{-R^2}\right)\end{aligned}$$

Outline

二重積分之變數變換

定義：(Jacobian)

若 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$，定義 Jacobian 函數為

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

定理：(雙變數變換變數)

若 $F: \Sigma \to \Omega$ 是從 uv-平面到 xy-平面的座標變換，且 $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$。如果 $J(u, v)$ 在 Σ 中不等於 0，則

$$\int\int_{\Omega} f(x, y)\, dA = \int\int_{\Sigma} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| J(u, v) \right| du\, dv$$

二重積分之變數變換-例題

例： 計算 $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-x)^2\, dy\, dx$

說明：

(1) 令 $\begin{cases} u &= x+y \\ v &= y-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= \frac{u-v}{2} \\ y &= \frac{u+v}{2} \end{cases}$

原來的 $\sqrt{x+y}\,(y-x)^2$ 現在化成簡單的 $u^{\frac{1}{2}}\, v^2$。

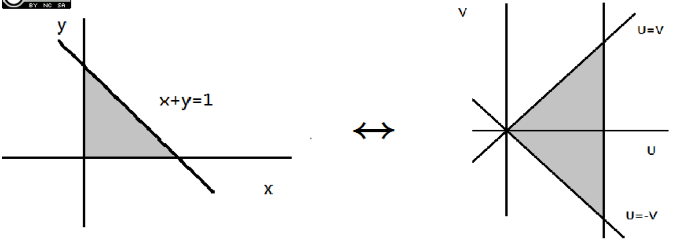
(2) 原來的積分區域 Ω 為：$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x$。

如下頁左圖被 $x=0,\ y=0,\ x+y=1$ 圍成的區域。

所以 Σ 就是 $\frac{u-v}{2}=0,\ \frac{u+v}{2}=0,\ \left(\frac{u-v}{2}\right)+\left(\frac{u+v}{2}\right)=1$ 所圍成的區域。即：$u=v,\ u=-v,\ u=1$ 圍成的區域 (下頁右圖)。

簡化成 $0 \leq u \leq 1,\ -u \leq v \leq u$。

二重積分之變數變換-例題



(3) 計算 Jacobian 函數。

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{ 恆不為 }0\text{。}$$

二重積分之變數變換-例題

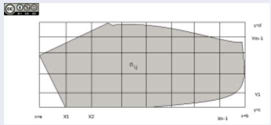
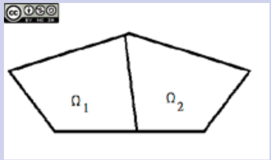
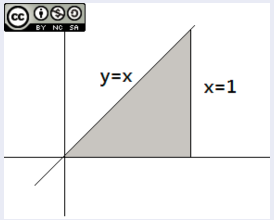
所以積分計算如下

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-x)^2\,dy\,dx$$

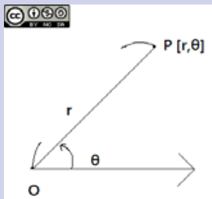
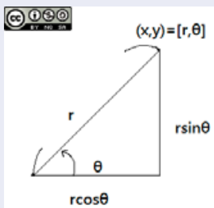
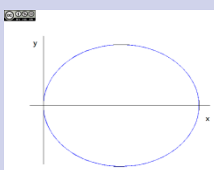
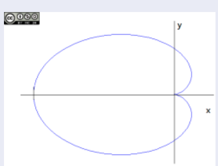
$$= \int_0^1 \int_{-u}^{u} \sqrt{u} v^2 \cdot \frac{1}{2}\,dv\,du = \frac{1}{6} \int_0^1 \sqrt{u}(v^3)\Big|_{-u}^{u} du$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 u^{\frac{7}{2}}\,du = \frac{2}{27} \left(u^{\frac{9}{2}} \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{27}$$

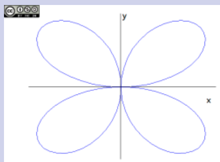
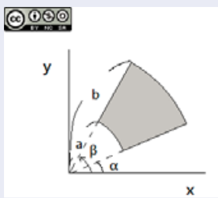
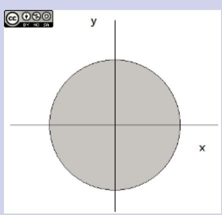
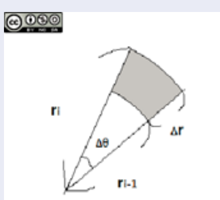
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
1、31-34			轉載自Microsoft Office 2010 PowerPoint 設計主題範本 本作品依據 Microsoft 服務合約及著作權法第46、52、65條合理使用。
8			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
10			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
13			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明

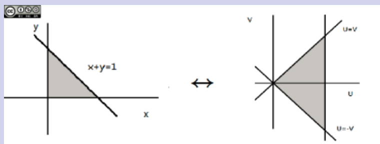
頁碼	作品	版權標示	作者/來源
17		CC BY NC SA	者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
18		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
20		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
20		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
20		BY NC SA	者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
21		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
21		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
23		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程
教學發展中心

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
29			者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。