Chapter 13

探測與逼近

13.1 有窮與無窮之間

近代數學之所以多彩繽紛，是因為它通往無窮，無窮是個浩瀚無垠的神秘世界，而人類所能掌控的是具體的有窮世界，以有窮探無窮，以已知問未知，就是一個逼近的過程。

我於第一章中談數學的本質，$\sqrt{2}$ 雖存在於人的理性世界裏，但工程師要用它，毫不遲疑會以

$$\sqrt{2} = 1.414213562\cdots$$

來計算，看他的需要，取適當的近似值。圓周率 π 是個超越數，人們要算圓面積，會以

$$\pi = 3.141592654\cdots$$

因需要而取適當的有理數來逼近圓的面積。

高中數學裡有三角函數表、對數表，那都是近似值，用人類熟悉的有理數來逼近。

你打開電腦，輸入某個函數，電腦會給你畫出圖形來，那也是一種近似圖形，用有理數逼近運算出來的結果。

工程師建造偉大的工程，建築師設計不朽的建築，一切都是逼近，就是人類利用太空導航，把太空船送上火星，也是一種逼近的過程。

可以這麼說，整個人類的科技文明都是以有窮探無窮的逼近文明，數學的本質雖是存在於人類的理性世界哩，現實世界裡找不到 $\sqrt{2}$，找不到 π，但數學既從生活中來，那 $\sqrt{2}, \pi$ 並非不食人間煙火，它透過逼近來展現它的存在，幫助人類處理所面對的問題。就像任何宗教的無窮，都要透過有窮的生命去展現那無窮的價值一樣，生命的可貴在此。

就以現代數學的研究內容來說，許多數學模型本身就是一種逼近模型，例如對波的研究，那波動方程式本身就是一種逼近模型，原始模型是個非線性方程式，但由於震幅很小，把它忽略掉，就成為線性方程式。線性方程式的好處多多，容易處理。那逼近的模型，在實務操作

上並未發現有任何不妥之處，而且能十分巧妙地表現出各種波的特性，妙哉！波動方程式。

以有窮探無窮，以已知測未知，有窮的已知世界具有某些特性，那探測的無窮是不是也具有該特性？這要看你怎麼探測，如果你探測的很粗糙，那預測常是不準的。當你的探測精準到某個程度，那無窮是可預測的。我們以下要談的，簡單說，就是這樣的內容。

13.2 逐點收斂 (Pointwise Converge)

給定實函數列 $\{f_n(x)\},\ n=1,2,3,\cdots,x\in I\subset\mathbb{R}$，固定 $x\in I$，$\{f_n(x)\}$ 為一實數列，我們說 $\{f_n\}$ 在 x 點收斂若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在，以 $f(x)$ 表示之。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在 $\forall\ x\in I$，我們稱 $\{f_n\}$ 在 I 上逐點收斂 (pointwise converge)，令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), x\in I$

今設 f_n 逐點收斂到 f，我們想知道

(a) f_n 在 I 上連續，問 f 是否在 I 上連續？

(b) f_n 在 I 上 Riemann 可積分，問 f 是否在 I 上可積分？

$$\text{且 } \lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)dx=\int_I f(x)dx \text{ 成立否？}$$

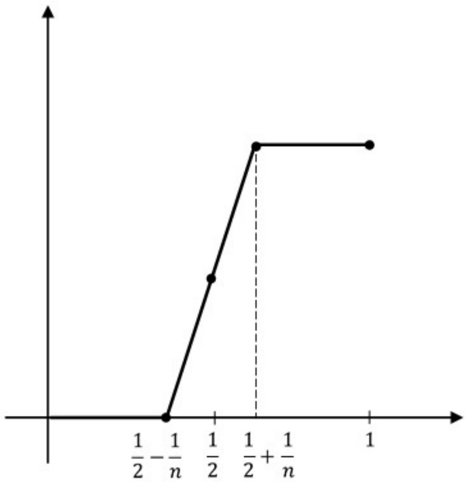
(c) f_n 在 I 上可導，問 f 在 I 上是否可導？且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)=f'(x)$ 成立否？

很不幸地，上面三個問題的答案都是否定的。

(a) 連續性不可遞

例 **1.** $$f_n(x)=\begin{cases} 0 & ,0\le x\le \frac{1}{2}-\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} & ,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ 1 & ,\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

f_n 的圖形如下圖



f_n 在 $[0,1]$ 連續，但

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & , x = \dfrac{1}{2} \\ 1 & , \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

f 在 $[0,1]$ 上並不連續。

(b) 可積性不可遞

例 **2.** 設 $A = \{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$ 表 $[0,1]$ 中的有理數集，$A_n = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$

令 $f_n(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A_n \\ 0 & , x \notin A_n \end{cases}$, $0 \le x \le 1.$

因此，f_n 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可積分，但

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1,\ \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$，顯然，$f$ 在 $[0,1]$ 上不可積分。

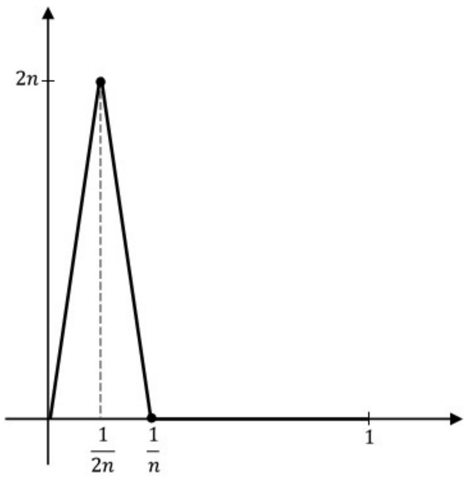
即使 f Riemann 可積，也不能保證

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

且看下例：

例 **3.** $f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & , 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ -4n^2\left(x - \dfrac{1}{n}\right) & , \dfrac{1}{2n} < x \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & , \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

f_n 的圖形如下圖



$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ \forall\, x \in [0,1]$，$f_n, 0$ 都是 Riemann 可積，但

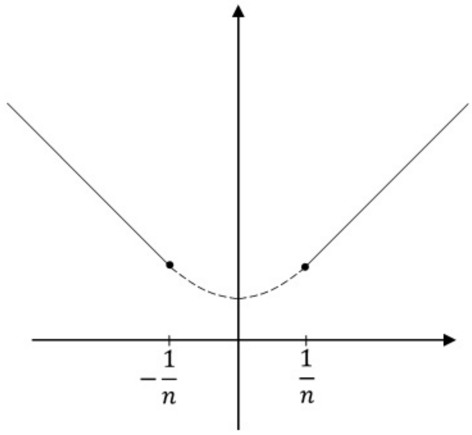
$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1\ \ \forall\, n,\ \int_0^1 0\,dx = 0\ !$$

積分值不能遞！

(c) 可微性不可遞

例 **4.** $f_n(x) = \begin{cases} |x| & ,|x| \geq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{n}{2} \cdot x^2 + \dfrac{1}{2n} & ,|x| < \dfrac{1}{n} \end{cases}$ $, -1 \leq x \leq 1$

f_n 的圖形如下圖



f_n 在 $[-1,1]$ 上處處可導，

$$f_n'(x) = \begin{cases} 1 & ,\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx & ,|x| < \dfrac{1}{n} \\ -1 & ,-1 \leq x \leq -\dfrac{1}{n} \end{cases} \quad ,-1 \leq x \leq 1$$

$f_n' \in C[-1,1]$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = |x|$，$f$ 在 $x = 0$ 點並不可微！

由此觀之，逐點收斂並非嚴格的探測，不足以將 f_n 的一些重要性質傳遞到 f 上。

什麼樣的探測可以將 f_n 的連續性、可積性和可微性傳遞到 f 上呢？以下我們將引入均勻收斂的概念，並逐一回答上述問題。

13.3 均勻收斂 (Uniformly Converge)

A. 均勻收斂

設 $\{f_n\}$ 在 I 上逐點收斂到 f 上，給定 $x \in I$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，根據極限的定義；

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N, \text{使 } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ 當 } n > N$$

注意，對同樣的 ϵ，這個 N 因 x 而變，不同的 x 所需的 N 各異，能否找到一個 N，與 x 無關，使

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall\ x \in I, \text{ 當 } n > N$$

如果對任意 $\epsilon > 0$，恆存在有這樣的 N，我們稱 f 在 I 上均勻收斂到 f。

把它寫成定義：

<u>定義 **13-1**</u>

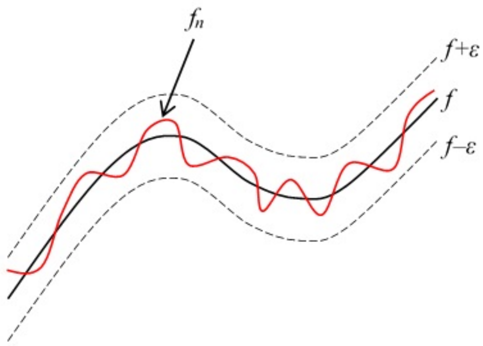
$\{f_n\}$ 為定義在 I 上的實函數，$I \subset \mathbb{R}$，若對任意 $\epsilon > 0$，$\exists\ N$，只與 ϵ 有關，使

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in I,\ \text{當} n > N$$

我們稱 f_n 在 I 上均勻收斂到 f。

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in I \Leftrightarrow f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon,\ \forall\ x \in I$$

圖示之，如下：



均勻收斂示意圖

例 **1.** $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}, 0\le x\le \pi$。

$|f_n(x)|<\dfrac{1}{n}$，給定 $\epsilon>0$，$\exists\ N>\dfrac{1}{\epsilon}$，則有

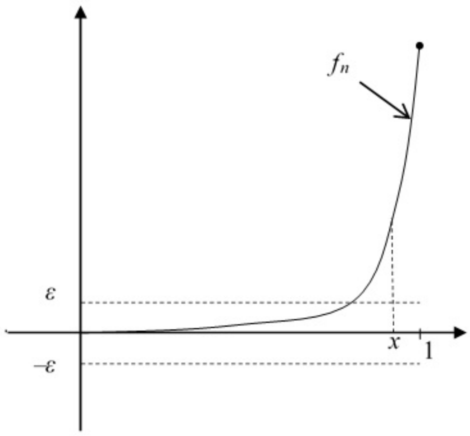
$n>N\Rightarrow \dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}<\epsilon\Rightarrow |f_n(x)|<\dfrac{1}{n},\ \forall\ x\in[0,\pi]$

$\therefore\ f_n\to 0$ uniformly on $[0,\pi]$

例 **2.** $f_n(x)=x^n, 0<x<1$

固定 x，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$。

f_n 的圖形如下：



顯然：對 $0<\epsilon<1$，例如取 $\epsilon=\dfrac{1}{10}$, $\forall\ N$, $\exists\ n>N$ 及 $x\in[0,1]$，使 $|x^n|>\epsilon$.
故 f_n 雖在 $[0,1]$ 上逐點收斂到 0，但此收斂並非均勻。

例 **3.** $f_n(x)=nx(1-x)^n,\ 0\le x\le 1$

固定 x，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0,\ \therefore\ f_n(x)\to 0,\ \forall\ x\in[0,1]$。
問：此收斂均勻否？

分析：

1. 如果 $f_n\to 0$ 在 $[0,1]$ 上均勻，令 $M_n=\max\limits_{0\le x\le 1} f_n(x)$，則 $M_n\to 0$ 當 $n\to\infty$
2. 我們現在就來看看 M_n：

$$f_n'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}=n(x-1)^{n-1}[1-(n+1)x]$$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ \dfrac{1}{n+1}$

$f_n(1) = 0$，$\therefore$ 1 非極大值。

而 $f_n'(x) > 0$ 當 $x < \dfrac{1}{n+1}$；$f_n'(x) < 0$ 當 $x > \dfrac{1}{n+1}$

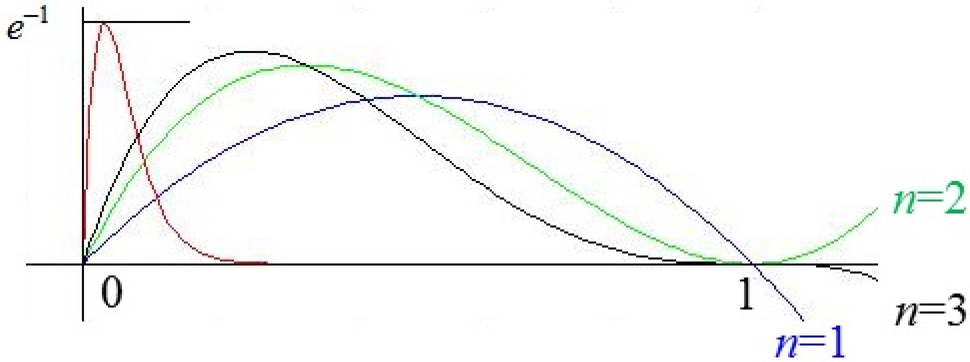
$\therefore f_n \nearrow$ strictly on $\left[0,\ \dfrac{1}{n+1}\right]$, $\searrow$ strictly on $\left(\dfrac{1}{n+1},\ 1\right]$

$\therefore f_n$ 在 $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ 取最大值，$M_n = f(x_n) = n\cdot\dfrac{1}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

3. 我們已知 $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$，故 $M_n = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \nearrow e^{-1}$ ，

因此，f_n 在 $[0,1]$ 上非均勻收斂。

圖示之如下：



B. Cauchy 準則 (Cauchy's criterion.)

對均勻收斂，Cauchy 給了如下判斷準則：

$\{f_n\}$ converges uniformly on $I \Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N$, 使

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon\ \forall\ x \in I,\ 當\ m, n > N$$

証明：$(\Rightarrow)$

設 f_n 均勻收斂到 f，給定 $\epsilon > 0,\ \exists\ N$ 使 $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$, 當 $n > N$。於是，

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\ 當 m, n > N$$

$(\Leftarrow)$

給定 $\epsilon > 0$, $\exists\ N$ 使

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2},\ \forall\ x \in I,\ \text{當} m, n > N \tag{1}$$

固定 x，$\{f_n(x)\}$ 為 Cauchy sequence，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在，令其為 $f(x)$。
於 (1) 式中，令 $m \to \infty$，得

$$|f(x) - f_n(x)| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,\ \forall\ x \in I,\ \text{當} n > N$$

即：f_n 在 I 上均勻收斂到 f。

例 **1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $(0,\delta)$ 上非均勻收斂

分析：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 的收斂，$\forall\ x \in [-\pi, \pi]$, 可用 Dirichlet test 方法判斷之，在此不再論述。
2. 令 $S_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\sin jx}{j}$，若 S_n 均勻收斂，在 $(0,\delta)$ 上，依 Cauchy 準則，$\forall\ x > 0$, $\exists N$，與 x 無關，使

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in (0,\delta),\ \text{當} m, n \ge N$$

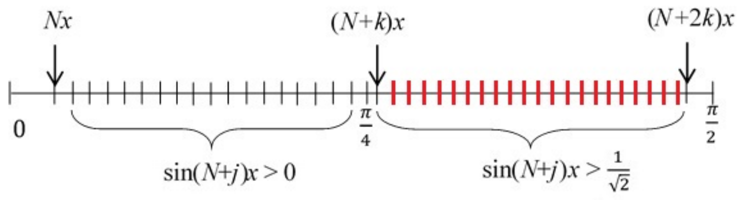
3. 欲証 S_n 在 $(0,\delta)$ 上非均勻收斂，即証：
$\exists\ \epsilon > 0,\ \forall\ N,\ \exists\ m, n \le N$，使

$$|S_m(x) - S_n(x)| \ge \epsilon,\ \text{對某些}\ x \in (0,\delta)\ \text{成立}$$

且由：

$$\begin{aligned}
|S_{N+2k}(x) - S_N(x)| &= \sum_{j=1}^{2k} \frac{\sin(N+j)x}{N+j},\ x, k\text{待定} \\
&> \sum_{j=k}^{2k} \frac{\sin(N+j)x}{N+j},\ \text{若}(N+j)x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ \forall\ j = 1, 2, \cdots, 2k. \\
&> \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=k}^{2k} \frac{1}{N+j},\ \text{若}(N+j)x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right),\ \forall\ j = k, k+1, \cdots, 2k \\
&> \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot k \cdot \frac{1}{N+2k} \\
&\overset{k=N}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \epsilon,\ \text{選定}\epsilon = \frac{1}{3\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

上面的操作圖示如下：



4. $k=N$ 既定，根據上圖選 x

   (i) $Nx<\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x<\dfrac{\pi}{4N}$

   (ii) $2Nx>\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x>\dfrac{\pi}{8N}$

   (iii) $3Nx<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow x<\dfrac{\pi}{6N}$

   $\therefore$ (i)(ii)(iii) 成立 $\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{8N}<x<\dfrac{\pi}{6N}$

5. 整理之，對 $\epsilon=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$, 取 N 夠大，使 $\dfrac{\pi}{6N}<\delta$。

   N 既定，取 $x=\dfrac{\pi}{7N}$，則 $\dfrac{\pi}{8N}<x<\dfrac{\pi}{6N}$，因此上面的估計成立，對此 x，我們有

   $$|S_{3N}(x)-S_N(x)|>\epsilon$$

   故 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,\delta)$ 上非均勻收斂。

例 **2.** $f_n(x)=\sin nx,\ 0\le x\le\pi$，問：$f_n$ 在 $[0,\pi]$ 上是否有均勻收斂子序列？

分析：

1. 設 $\{f_n\}$ 有均勻收斂子序列 $\{f_{n_k}\}$，依 Cauchy's criterion,
   $\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ N$ 使 $|f_{n_k}(x)-f_{n_l}(x)|<\epsilon,\ \forall\ x\in[0,\pi],$ 當 $k,l>N$
2. $\epsilon^2>(\sin n_kx-\sin n_lx)^2=\sin^2 n_kx-2\sin n_kx\cdot\sin n_lx+\sin^2 n_lx$
   上式兩邊在 $[0,\pi]$ 上積分，記住：
   $$\int_0^\pi \sin^2 nx\,dx=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\frac{\pi}{2}$$
   $$\int_0^\pi \sin mx\cdot\sin nx\,dx=0,\ \text{若 } m\ne n$$
   我們有
   $$\epsilon^2\pi>\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$
   此為不可能，當 $0<\epsilon<1$
3. 結論：$\{f_n\}$ 在 $[0,\pi]$ 上不可能有均勻收斂子序列。

Remark:

利用 Lebesgue Dominate Convergence Theorem 可判定 $f_n(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上甚至無逐點收斂子序列，這一部分就留給同學當習題吧。

Lebesgue Dominate Convergence Theorem:

$I \subset \mathbb{R}$ 為可測集，f_n 在 I 上可積，$f_n(x) \to f(x)\ \forall\ x \in I$

若 $|f_n(x)| \leq g(x),\ \displaystyle\int_I g(x)dx < \infty$，則：

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$

簡言之，若 f_n 逐點收斂，$|f_n|$ 在 I 上被一可積函數所控，則 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$

注意：定理中的 I 可以是 $[0,\infty), (-\infty,\infty), \cdots$，很厲害。

這個定理是實變函數論中非常重要的定理，在此先拿來借用吧。

13.4 可遞性

在這一節裡我們將對 f_n 給出適當條件，以確保連續、積分、微分這些性質可以傳遞到 f 上。

A. 連續性的可遞

<u>定理 **13-1**</u> f_n 在 $[a,b]$ 上連續，若 $f_n \to f$ 在 $[a,b]$ 上均勻，則 f 在 $[a,b]$ 上連續。

分析：

1. $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)| = I_1 + I_2 + I_3$.

2. $f_n \to f$ uniformly on $[a,b]$

   給定 $\epsilon > 0$, $\exists\, N$ 使 $|f_n(x)-f(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ $\forall\, x \in [a,b]$, 當 $n > N$

   選定 $n > N$, 則分析 1. 中 $I_1, I_3 < \dfrac{\epsilon}{3}$

3. f_n 在 $[a,b]$ 上連續，$\therefore f_n$ 在 $[a,b]$ 上均勻連續。
   對此 $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta$ 使 $|f_n(x)-f_n(y)| < \dfrac{\epsilon}{3}$, 當 $|x-y| < \delta$

4. 對此 δ，我們有

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,\ \text{當}|x-y| < \delta$$

   $\therefore f$ 在 $[a,b]$ 上均勻連續。

Remark:

連續是局部性質，定理 13-1 中 $[a,b]$ 可改為 $[0,\infty), (a,b), [a,b), (a,b], (-\infty,\infty), \cdots$ 只要 I 具以下性質：

$$\forall\, x \in I,\ \exists\, [a,b]\text{使}x \in [a,b] \subset I$$

則定理 13-1 對 I 成立。

例. 已知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 收斂到 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & ,0 < x \le \pi \\ 0 & ,x = 0 \\ -\dfrac{\pi + x}{2} & ,-\pi \le x < 0 \end{cases}$

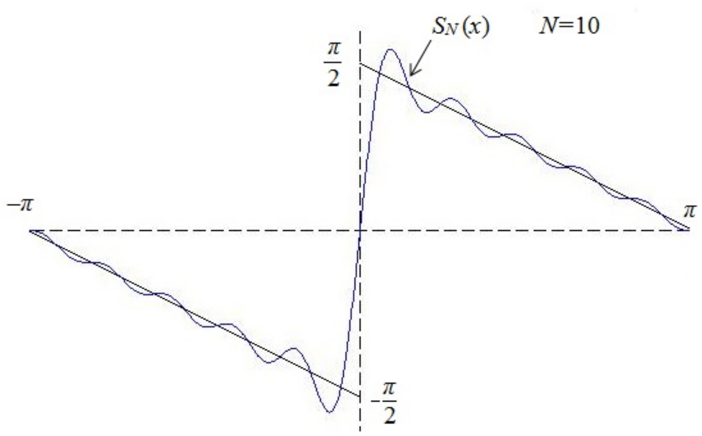
根據定理 13-1，可斷定此收斂在任意 $(-\delta,\delta)$ 上非均勻，因若為均勻收斂，f 必須在 $(-\delta,\delta)$ 上連續，但 f 顯然在 $x = 0$ 點並不連續。

Remark: $f(x)$ 的 Fourier Series 為 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$，而 $f \in C^1$，除了 $x = 0$ 這點，f 在 $x = 0$ 雖不連續，不過在 $x = 0$ 點滿足 $f(0) = \dfrac{1}{2}[f(0^+) + f(0^-)]$，根據 Fourier Series 的

理論，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=f(x),\ \forall\, x\in[-\pi,\pi]$$

令 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\sin nx}{n}$，$S_N$ 與 f 的關係圖示如下：



$S_N(x)$ 均勻收斂到 $f(x)$，在 $[\delta,\pi]$ 上，但在 $(0,\delta)$ 上則非，$\forall\ \delta>0$.

B. Riemann 積分的可遞

<u>定理 **13-2**</u> 設 f_n 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，$f_n\to f$ 在 $[a,b]$ 上均勻，則

(a) f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

分析：

(a) 1. 欲証 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，我們只需驗證：$\forall\ \epsilon>0,\exists\ [a,b]$ 的分割 P 使

$$U(P,f)-L(P,f)<\epsilon$$

2. $f_n\to f$ uniformly on $[a,b]$，$\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ N$
使 $|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\epsilon}{4(b-a)}$，當 $n>N$

即：$f_n(x)-\dfrac{\epsilon}{4(b-a)}<f(x)<f_n(x)+\dfrac{\epsilon}{4(b-a)}$，當 $n>N$

3. 設 $P:=\{a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b\}$ 為 $[a,b]$ 上的分割，

$M_i(f)=\max\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)<\max\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}\left[f_n(x)+\dfrac{\epsilon}{4(b-a)}\right]=M_i(f_n)+\dfrac{\epsilon}{4(b-a)}$

同理，$m_i(f)=\min\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)\ge m_i(f)-\dfrac{\epsilon}{4(b-a)}$

$\Rightarrow$

$$U(P,f) < U(P,f_n) + \frac{\epsilon}{4}$$

$$L(P,f) > L(P,f_n) - \frac{\epsilon}{4}$$

$\therefore$

$$U(P,f) - L(P,f) < U(P,f_n) - L(P,f_n) + \frac{\epsilon}{2},\ \text{當} n > N \tag{2}$$

4. 選定 $n > N$，f_n 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，
   給定 $\epsilon > 0$, $\exists$ $[a,b]$ 上的分割 P 使

$$U(P,f_n) - L(P,f_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

   代入 (2) 式得

$$U(P,f) - L(P,f) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

   故 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

(b) $f_n \to f$ uniformly on $[a,b]$, $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N$ 使 $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{(b-a)}$，當 $n > N$

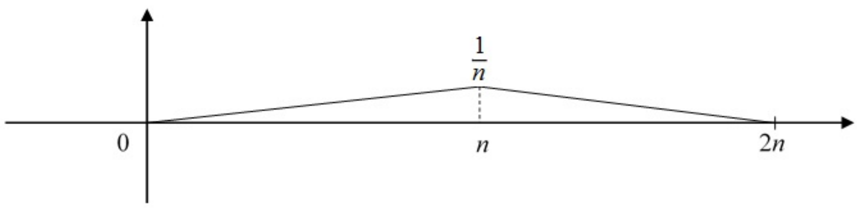
$\Rightarrow \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \dfrac{\epsilon}{(b-a)} \cdot (b-a) = \epsilon$，當 $n > N$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

Remark: 若 $[a,b]$ 改為 $[0,\infty)$，Riemann 積分改為瑕積分，分析 (b) 中的論述將失所依據，定理 13-2(b) 不再成立，且看下例。

例 **1.** $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} & ,0 \le x \le n \\ -\dfrac{1}{n^2}(x-2n) & ,n < x \le 2n \\ 0 & ,x > 2n \end{cases}$

f_n 的圖形如下：



顯然，$|f_n(x)| < \dfrac{1}{n} \to 0$ uniformly on $[0, \infty)$，

$\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx = 1,\ \forall\ n$，但 $\displaystyle\int_0^\infty 0\,dx = 0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$

我們於 13-2 節例 2. 中，利用 $\{\sin nx\}$ 的正交性來推論其無均勻收斂子序列，對一般函數列可沒有這麼美好的性質。利用定理 13-1 及 13-2，也可以推論 $\{\sin nx\}$ 無均勻收斂子序列，這個方法適用於一般函數列。

例 **2.** 試証 $\{\sin nx\}, 0 \leq x \leq \pi$ 無均勻收斂子序列。

分析：

1. 若 $\{\sin nx\}$ 有均勻收斂子序列 $\{\sin n_k x\}$，收斂到 f，根據定理 13-1，f 必為連續函數。

2. $\sin n_k x \to f$ uniformly on $[0, \pi]$
   $\Rightarrow f(x)\sin n_k x \to f^2$ uniformly on $[0, \pi]$

   根據定理 13-2 及 Riemann Lebesgue Lemma，
   $$\int_0^\pi f^2(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)\sin n_k x\,dx = 0$$
   $\Rightarrow$
   $$f(x) = 0,\ \forall\ x \in [0, \pi]$$

3. $\sin n_k x$ 在 $1, -1$ 間飛舞擺盪，顯然不會均勻收斂到 0。

Remark:

分析 2 透過 Riemann Lebesgue Lemma 得到 $\displaystyle\int_0^\pi f^2(x)dx = 0$ 從而推論 $f = 0$，

同學也可以直接由 $\sin n_k x \to f$ uniformly on $[0, \pi]$，兩邊對 $[\alpha, \beta]$ 積分，令 $n_k \to \infty$ 得 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0,\ \forall\ \alpha, \beta \in [0, \pi]$，據此推論 $f = 0$，無須 Riemann Lebesgue Lemma.

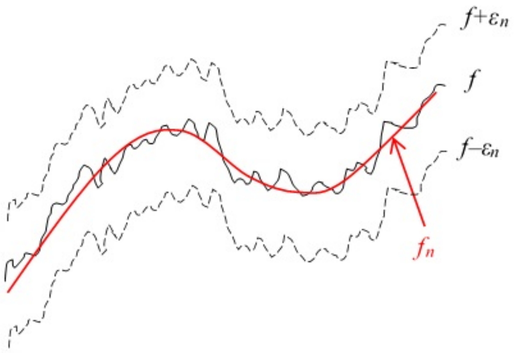
C. 導數的傳遞問題

導數牽涉到函數的平滑性問題，平滑性無法由均勻收斂傳遞。

例如：一維的布朗運動 (醉漢走路)，醉漢下一刻要往左或右走，完全隨機，無法預測，設 $f(t)$ 表醉漢在 t 時刻的位置，則 f 為一連續，但處處不可導的函數。

設 f 為一維布朗運動 (或股市大盤走勢圖)，考慮 $0 \le t \le 1$，對 $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$，我們恆可找到一個非常 smooth 的曲線 $f_n(t)$，

使 $f(t) - \epsilon_n < f_n(t) < f(t) + \epsilon_n$，如圖所示。



$f_n \to f$ uniformly on $[0,1]$，$f_n'(x)$ 存在 $\forall\, x \in [0,1]$，但 f 處處不可導。

Remark: 根據 Weierstrass Approximation Theorem(接下來會談)，那 f_n 可以選為 polynomial，好到不行，而 f 卻壞到不行，處處不肯導！

均勻收斂既然無法傳遞函數的平滑性，該如何是好？

下面的定理告訴我們，那均勻收斂應該放到 f_n' 上，而不是 f_n。

定理 **13-3** (推窗望月)

設 $f_n \in C^1[a,b]$, $f_n(x) \to f(x)$ pointwise on $[a,b]$，$f_n'(x) \to g(x)$ uniformly on $[a,b]$，

則

(a) $f'(x)$ 存在 , $\forall\, x \in [a,b]$

(b) $f'(x) = g(x)$

分析：回憶微積分基本定理：

第一基本定理 f 在 $[a,b]$ 上連續，$G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$，則 $G'(x) = f(x),\ \forall\, x \in [a,b]$

第二基本定理 f 在 $[a,b]$ 上連續，$F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in [a,b]$，則

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

現在 $f_n \in C^1[a,b]$，即 f_n' 在 $[a,b]$ 上連續，根據微積分第二基本定理，

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt \tag{3}$$

而 $f_n' \to g$ uniformly on $[a,b]$，根據定理 13-2，於 (3) 式中令 $n \to \infty$，得

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt \tag{4}$$

f_n' 連續，依定理 13-1，知 g 連續，再依微積分第一基本定理，於 (4) 式中兩邊求導得

$$f'(x) = g(x)$$

Remark:

上面這個定理，由於假設：$f_n \in C^1[a,b]$，條件太好了，利用微積分基本定理，定理很容易導出，猶如桌上取柑。雖是桌上取柑，實務上碰到的問題條件都不致太壞，這個定理應用起來游刃有餘。

例**.** 我們之前談過冪級數基本定理：

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$，則

(a) f 在 $|x| \le \rho,\ \rho < R$，上均勻收斂

(b) $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ \forall\, |x| < R$

這個定理的 (b) 可利用定理 13-3 輕易導出。

分析：令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$，則 $S_n'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

$\dfrac{1}{R'}=\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k|a_k|}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\dfrac{1}{R}$

$\therefore S_n'(x)$ 在 $|x|\le\rho,\rho<R,$ 上均勻收斂到 $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

又 $S_n(x)$ 收斂到 $f(x)$，依定理 13-3：

$$f'(x) \text{ 存在且等於 } g(x)$$

即：

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Remark: 根據冪級數的唯一定理，上面的例子對實冪函數成立，對複級數自然也成立，留給同學當習題吧。

定理 **13-4** (靈貓捕鼠)

設 $f_n'(x)$ 存在 $\forall\, x\in[a,b]$，並設 $f_n'(x)\to g(x)$，在 $[a,b]$ 上均勻，若 $\exists\, x_0$ 使 $\{f_n(x_0)\}$ 收斂，則

(a) f_n 在 $[a,b]$ 上均勻收斂

(b) 令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，則 $f'(x)=g(x),\ \forall\, x\in[a,b]$

分析：

1. 現在只知道 $f_n'(x)$ 存在 $\forall\, x\in[a,b]$，f_n' 連不連續毫無訊息，因此，那強而有力的工具－微積分基本定理在此愛莫能助！怎麼辦？

   好在還有個均值定理，它說：

   若 f 在 $[a,b]$ 上連續，在 (a,b) 上可導，則 $\exists\, c\in[a,b]$ 使

   $$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

2. 欲証 f_n 在 $[a,b]$ 上均勻連續，可驗證它滿足 Cauchy's criterion，且看:

   $$|(f_m(x)-f_n(x))-(f_m(x_0)-f_n(x_0))|=|f_m'(\xi)-f_n'(\xi)|\cdot|x-x_0|$$

   故

   $$\begin{aligned}|f_m(x)-f_n(x)|&\le|f_m(x_0)-f_n(x_0)|+|f_m'(\xi)-f_n'(\xi)|\cdot|x-x_0| \qquad (5)\\&=I_1+I_2\end{aligned}$$

其中 ξ 為介於 x, x_0 之間某點。

而 f_n' 在 $[a,b]$ 上均勻收斂，給定 $\epsilon > 0$, $\exists\ N_1$ 使

$$|f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)},\ \forall\ x \in [a,b],\ \text{當} m,n > N_1$$

$$\therefore I_2 = |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| \cdot |x - x_0| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\epsilon}{2}$$

又 $\{f_n(x_0)\}$ 收斂，對此 ϵ， $\exists\ N_2$ 使

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2},\ \text{當} m,n > N_2$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，根據 (5) 式，則有

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\ \forall\ x \in [a,b],\ \text{當} m,n > N$$

故 f_n 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

3. 固定 $x \in [a,b]$，令 $\phi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} & ,t \neq x \\ f_n'(x) & ,t = x \end{cases}$

顯然，$\phi_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上連續，若能証明 $\phi_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂，

由於 $\phi_n(t) \to \phi(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} & ,t \neq x \\ g(x) & ,t = x \end{cases}$,

$\phi_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上連續 $\Rightarrow \phi$ 在 $[a,b]$ 上連續

特別 ϕ 在 x 點連續，$\therefore \lim\limits_{t \to x} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} = g(x)$，

即：$f'(x) = g(x)$.

4. $\phi_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂的証明：

(i) $t \neq x$

$$\begin{aligned} |\phi_m(t) - \phi_n(t)| &= \left| \frac{(f_m(t) - f_n(t)) - (f_m(x) - f_n(x))}{t - x} \right| \\ &= |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| && \xi\text{介於}x,t\text{之間} \\ &< \epsilon && \text{當} m,n > N \end{aligned}$$

(ii) $t = x$

$$|\phi_m(x) - \phi_n(x)| = |f_m'(x) - f_n'(x)| < \epsilon,\ \text{當} m,n > N$$

$\therefore \{\phi_n(t)\}$ 滿足 Cauchy's criterion $\forall\ t \in [a,b]$

故 $\{\phi_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

靈貓為了捕鼠，或潛藏，或伏進，耐心等待，最後縱身一撲，終於捕到老鼠。
條件強則推窗望月，條件弱則靈貓捕鼠。數學家，很有能耐。

13.5　均勻收斂的判斷

均勻收斂好處多多，如何判斷一函數級數在某區間上均勻收斂？

A. Weierstrass M-test.

Weierstrass 對函數級數給出一個簡單而有力的判斷，稱為 M-test.

<u>定理 **13-5**</u> $|f_n(x)| < M_n,\ \forall\ x \in I$，若 $\sum M_n < \infty$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

証明：依 Cauchy's criterion，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \Rightarrow \text{給定 } \epsilon > 0,\ \exists\ N\text{使 } \sum_{i=m}^{n} M_i < \epsilon,\ \text{當}n > m > N \\ \Rightarrow \sum_{i=m}^{n} |f_i(x)| < \sum_{i=m}^{n} M_i < \epsilon,\ \forall\ x \in I,\ \text{當}n > m > N \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\text{在}I\text{上均勻收斂}\end{aligned}$$

例 **1.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n},\ -\pi \le x \le \pi$, 均勻收斂。

因 $\left|\dfrac{\cos nx}{2^n}\right| < \dfrac{1}{2^n}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} < \infty$，依 M-test，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上均勻收斂。

令 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n}$，問：

(a) $f'(x)$ 存在否？

(b) $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n \sin nx}{2^n}$ 成立否？

觀察：

1. $\left|\dfrac{-n \sin nx}{2^n}\right| < \dfrac{n}{2^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} < \infty$，依 M-test，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n \sin nx}{2^n}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上均勻收斂。

2. 再依定理 13-4，知 $f'(x)$ 存在 $\ \forall\ x \in [-\pi, \pi]$，且 $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n \sin nx}{2^n}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n} < \infty,\ \therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n^2 \cos nx}{2^n}$ 均勻收斂 $\Rightarrow f''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n^2 \cos nx}{2^n}$

   依此類推，可一直再導下去，$\therefore\ f \in C^{\infty}$

Remark: 令 $A(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{2^n},\ B(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{2^n}$

則 $A+iB=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=f(z)$，其中 $z=\cos n\theta+i\sin n\theta$

$f(z)$ 在 $|z|<2$ 上解析，故 A,B 為解析函數。

例 **2.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\ -\pi\le x\le\pi$，均勻收斂，因 $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$，依 M-test，知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上均勻收斂。

令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$，問：

(a) $f'(x)$ 存在否？$x\in[-\pi,\pi]$

(b) 若 $f'(x)$ 存在，$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin nx}{n}$ 成立否？

觀察：$\left|-\frac{\sin nx}{n}\right|<\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$，$M$-test 失效。

怎麼辦？

下面我們再介紹另一個判斷法，可以處理上面的困擾。

B. Dirichlet test.

Dirichlet test 是對形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 均勻收斂的判斷。

<u>定理 **13-6**</u> 設 $a_n(x),b_n(x)$ 為定義於 $I\subset\mathbb{R}$ 上的實函數，

令 $B_n(x)=b_1(x)+b_2(x)+\cdots+b_n(x)$，若

(i) $\exists\ M$ 使 $|B_n(x)|\le M,\ \forall\ x\in I$

(ii) $a_n(x)\searrow 0$ 在 I 上均勻

則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

證明：其方法一如第八章中 Dirichlet test 的證明，檢驗 Cauchy criterion:

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| &= |a_m(x)(B_m(x)-B_{m-1}(x)) + a_{m+1}(x)(B_{m+1}(x)-B_m(x)) \\
&\quad + \cdots + a_n(x)(B_n(x)-B_{n-1}(x))| \\
&= \left|\sum_{k=m}^{n-1} B_k(x)(a_k(x)-a_{k+1}(x)) + a_n(x)B_n(x) - a_m(x)B_{m-1}(x)\right| \\
&\leq M\sum_{k=m}^{n-1}(a_k(x)-a_{k+1}(x)) + Ma_n(x) + Ma_m(x) \\
&= M(a_m(x)-a_n(x)) + Ma_n(x) + Ma_m(x) \\
&= 2Ma_m(x) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

根據 (ii)，$a_m(x) \searrow 0$ uniformly on I, $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, N$ 與 x 無關，使

$$0 \leq a_m(x) < \frac{\epsilon}{2M},\ \forall\, x \in I,\ 當 m > N$$

依此，代入 (6)，得

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| < \epsilon,\ \forall\, x \in I,\ 當 n > m > N$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

例 **3.** 現在回過頭來看前面的例 2.

M-test 雖然失效，但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 卻符合 Dirichlet test 的形式：

(i) $a_n(x) = \frac{1}{n} \searrow 0$ uniformly on $[-\pi, \pi]$

(ii) $B_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin \frac{n}{2}x \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$,

$$|B_n(x)| < \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} < \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}},\ \forall\, x \in [\delta, \pi],\ \delta > 0.$$

依 Dirichlet test, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, \pi]$ 上均勻收斂

$\therefore\ f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n}$, 在 $[\delta, \pi]$ 上，$\forall\, \delta > 0$

$\therefore$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n},\ \forall\ x \in [-\pi, \pi], x \neq 0 \tag{7}$$

於 $x = 0$ 這點如何？函數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在這一點取極大值，它可導嗎？我們且由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{2}(\pi + x) & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

此級數在 $[-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi]$ 上均勻收斂 $\forall\ \delta > 0$。
任取 $x \in (\delta, \pi]$，於 $[x, \pi]$ 上積分之，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} + \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{1}{4}(\pi - x)^2$$

據例. **2**，$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上連續。
令 $x = 0$，得

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

據此，可得

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

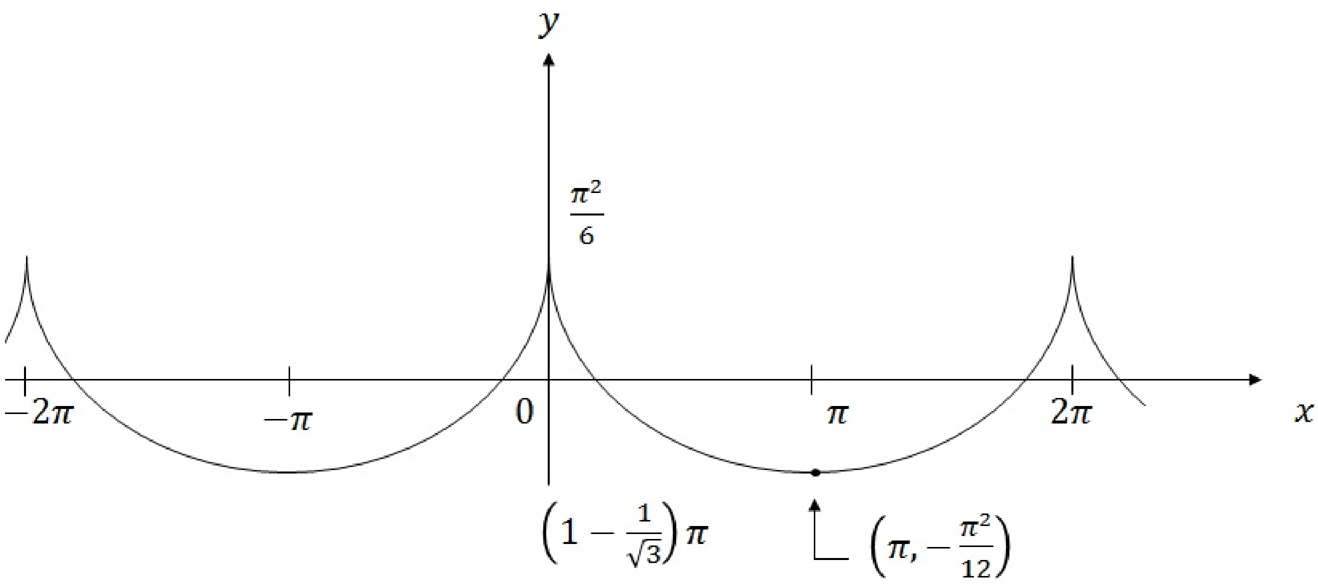
於是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\pi - x)^2 - \frac{\pi^2}{12} & 0 < x \leq \pi \\ \frac{\pi^2}{6} & x = 0 \\ \frac{1}{4}(\pi + x)^2 - \frac{\pi^2}{12} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

得 $f'(0^+) = -\frac{\pi}{2}, f'(0^-) = \frac{\pi}{2}.$

$f'(0^+) \neq f'(0^-)$，故 f 在 $x = 0$ 不可導！

f 的圖形簡繪如下：



Remark:

1. 十九世紀中葉以前的數學家直覺上認為連續函數應該不至於太壞，不可導的點應該很稀疏，直到 1860 年代以後，人們才對連續與可導之間有更清楚的認識，Riemann 認為

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

不可導的點在 $[0,\pi]$ 上稠密，但他並沒有給出明確的証明。1872，Weiestrass 証明

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),\ 0<a<1, b \text{ 為奇數}$$
$$ab>1+\frac{3\pi}{2}\simeq 5.712389$$

在 $\mathbb{R}$ 上連續，但處處不可導。
f 的連續性很容易從 M-test 得到，因 $\sum a_n^2<\infty$。
$\cos(b^n\pi x)$ 表示週期被壓縮 b^n 倍，而 $\cos(b^n\pi x)$ 在 $-1,1$ 間震盪飛舞，乘上 a^n 倍後，將它們疊加起來，使收斂，就成了一個”毛茸茸”的函數，一個函數毛茸茸就處處不可導了。

現代人對碎形 (fractal) 有清晰的認識，大部分的碎形邊界都是不可導的。有的雖在某些點上可導，但這些點的測度為 0。

其實自然界的連續函數幾乎都是處處不可導的，你很難想像一顆花粉在水中作布朗運動，它會跑出一條平滑曲線來。

有關 Weiestrass function 的介紹，請同學上網看 Wikipedia，點 Weiestrass function，那裏有圖，以及相關的資訊，勝過我千言萬語。

Hardy 對這"continuous but no where differentiable" 函數的尋覓有更簡單的建構，同學如有興趣，可參考 Rudin: Principles of Mathematical Analysis, 3rd Edition, P.154, Theorem 7.18.

2. 另一個更驚人的事是：

$$\text{存在一連續寫像把 } [0,1] \text{ 映成 } [0,1]\times[0,1]$$

怎麼可能？連續寫像竟然把一維的區間映成二維的方塊，太不可思議了吧！

G.Peano 於 1890 首次發現這樣的" 曲線"，震驚了當時的數學界，之後陸續有人提出不同的" 曲線"，這類曲線，數學上稱為 Space filling curve，有關它的介紹，也請同學上網看 Wikipedia，點 Space filling curve，那裏有生動的介紹，值得一閱。

例 **4.** $L^p(0,1)\subset L^1(0,1),\ \forall\ p>1$，但 $L^1(0,1)\neq \bigcup\limits_{p>1} L^p(0,1)$

觀察：

1. $\|f\|_1\le\|f\|_p,\ \forall\ f\in L^p(0,1),\ \therefore L^p(0,1)\subset L^1(0,1),\ \forall\ p>1$

2. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_0^\infty=\begin{cases}\infty & ,\text{當}p>1\\ \dfrac{1}{1-p} & ,\text{當}p<1\end{cases}$

3. 令 $f_n(x)=x^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$，則 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx=n<\infty$

   $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)^p\,dx=\infty$ 當 $p\left(1-\dfrac{1}{n}\right)>1.$

4. 又令 $\phi(x)=\dfrac{1}{x}$, 則 $f_n(x)<\phi(x),\ \forall\ 0<x<1,$ 並令 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{f_n(x)}{2^n}$

   則 $0\le f(x)\le\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{\phi(x)}{2^n}<\phi(\delta)\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}=\phi(\delta),\ \forall\ x\in(\delta,1)$

   依 M-test，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{f_n(x)}{2^n}$ 在 $(\delta,1)$ 上均勻收斂，

   f_n 在 $[\delta,1]$ 上連續，$\therefore\ f$ 在 $[\delta,1]$ 上連續，$\forall\ \delta>0$，故 f 在 $(0,1)$ 上連續。

5. $\|f\|_1\le\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{\|f_n\|_1}{2^n}=\sum_{n=1}^\infty\frac{n}{2^n}<\infty,\ \therefore\ f\in L^1(0,1)$

   $\forall\ p>1,\ \exists\ n$ 使 $p\left(1-\dfrac{1}{n}\right)>1$，對這個 n，有：

$$\int_0^1 f(x)^p dx>\int_0^1\left|\frac{f_n(x)}{2^n}\right|^p dx=\infty,\ \therefore\ f\notin L^p(0,1)$$

故 $L^1(0,1) \neq \bigcup\limits_{p>1} L^p(0,1)$

13.6 Weierstrass 逼近定理 (The Weierstrass Approximation Theorem.)

A. 古典 Weiestrass 逼近定理

任意連續函數，都可以用多項式在閉區間上均勻地逼近，這就是古典 Weiestrass 逼近定理的內容，寫成定理如下：

<u>定理 **13-7**</u> 設 f 為定義於 $[a,b]$ 上的實連續函數，則給定 $\epsilon > 0$，存在多項式 P 使

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in [a,b]$$

有關 Weiestrass 逼近定理的証明，通常所見有：

1. 加權平均 (convolution) 的觀點
2. Bernstein polynomial 的觀點

   Bernstein 透過機率的觀點，利用大數法則，直接把那多項式

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

寫出，証明

$$|f(x) - B_n(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in [0,1],\ \text{當}n\text{夠大}$$

實在是慧眼獨具。不過太多巧妙，而且只限單變數函數，在此，我捨而不取。

以下介紹透過加權平均的觀點，把那多項式找出。
此方法有其脈絡可循，且可推廣到多變數函數。

回憶 convolution 中核函數的性質：

設 $\{\kappa_n(x)\}$ 為定義於 $\mathbb{R}$ 上的一組核函數，即：

(i) $\kappa_n(x) \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

(ii) $\displaystyle\int \kappa_n(x)dx = 1,\ \forall\ n$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} \kappa_n(x)dx = 0,\ \forall\ \delta > 0 \tag{8}$$

若 f 為定義於 (c,d) 上的實連續函數，則

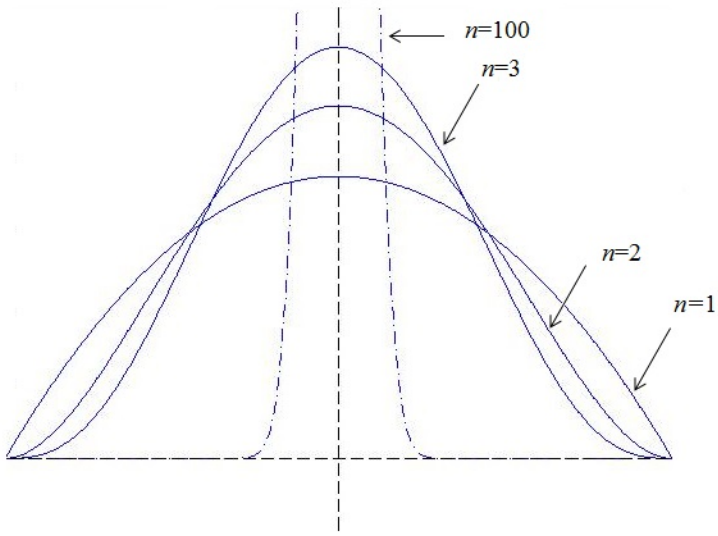
$$\lim_{n\to\infty} (\kappa_n * f)(x) = f(x),\ \forall\ x \in (c,d)$$

此收斂在 $[a,b]$ 上均勻， $\forall\,[a,b]\subset(c,d)$

考慮拋物線 $y=1-x^2$，只取 $-1\le x\le 1$ 這一區段，

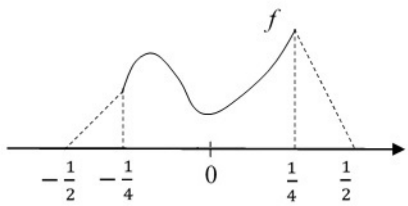
令 $\kappa_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\alpha_n}(1-x^2)^n & ,-1\le x\le 1\\ 0 & ,|x|>1\end{cases}$

其中 $\alpha_n=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n dx$



直覺上 $\{\kappa_n\}$ 應是一組核函數，事實上的確如此，(i)(ii) 顯然成立，(iii) 稍後再驗。

設 f 為定義於 $\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right]$ 上的實連續函數，將 f 線型延拓到 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上，如下圖



則 f 為定義於 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上的連續函數，依核函數的加權平均定理，我們有：

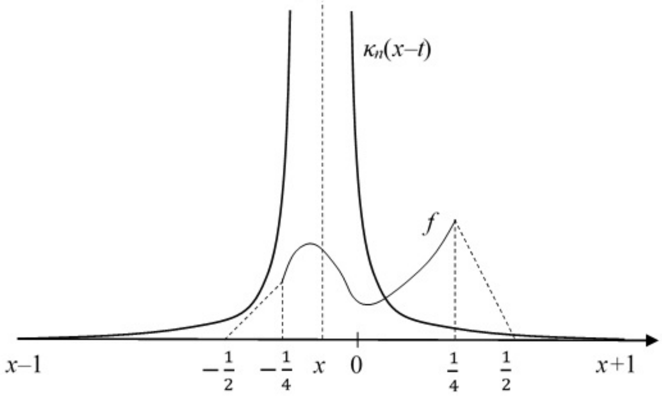
$$(\kappa_n * f)(x)\to f(x)\text{ uniformly on}\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$$

而

$$
\begin{aligned}
(\kappa_n * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_n(x-t)f(t)dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \kappa_n(x-t)f(t)dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [1-(x-t)^2]^n f(t)dt,\ \text{當} x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\
&= \text{polynomial in } x, \text{degree } 2n
\end{aligned}
$$

取 $P_{2n}(x) = (\kappa_n * f)(x)$ 即為所求。

上面積分上下限圖示如下：



注意：$x, t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow x - t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow \kappa_n(x-t) = [1-(x-t)^2]^n$

$\Rightarrow (\kappa_n * f)(x) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [1-(x-t)^2]^n f(x)dt$

積分的上下限與 x 無關，$\forall\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3. 對一般的 $[a,b]$，可將 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 線性映射至 $[a,b]$，

   令 $x=a+\frac{b-a}{2}\left(t+\frac{1}{4}\right), -\frac{1}{4}\le t\le \frac{1}{4}$

   則 $f(x)=f(x(t))$，為定義在 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 上的連續函數。

   $\forall\ \epsilon>0,\ \exists$ 多項式 $P(t)$ 使

   $$|f(x(t))-P(t)|<\epsilon,\ \forall\ t\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$$

   即

   $$|f(x)-P(t(x))|<\epsilon,\ \forall\ x\in[a,b]$$

   而 $P(t(x))$ 為 x 的多項式，得証。

4. 現在回過頭來驗証我們所取的 $\{\kappa_n(x)\}$ 滿足 (8) 式。

   $$\int_{|x|>\delta}\kappa_n(x)dx=\frac{\beta_n}{\alpha_n},\ \beta_n=\int_\delta^1(1-x^2)^n dx$$

   $$\alpha_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx>\int_0^1(1-x)^n dx=\frac{1}{n+1}$$

   $$\beta_n=\int_\delta^1(1-x^2)^n dx<\int_\delta^1(1-\delta^2)^n dx=(1-\delta^2)^n\cdot(1-\delta)$$

   $$\therefore\ \int_{|x|>\delta}\kappa_n(x)dx<\frac{(1-\delta^2)^n(1+\delta)}{n+1})\to 0\ \text{ 當 } n\to\infty$$

   故 $\{\kappa_n\}$ 確實為一組 summability kernel.

Remark: 對定義於 $Q=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]\times\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]\times\cdots\times\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 上的實連續函數 f，

仿上可將它連續延拓到 $D=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\cdots\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上，

使 f 在 D 以外恆為 0，則

$$P_n=\frac{1}{\alpha_n^n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cdots\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)[1-(x_1-t_1)^2]^n\cdots[1-(x_n-t_n)^2]^n dt_1\cdots dt_n$$

(其中 $\alpha_n=\int_{-1}^1(1-t^2)^n dt$) 為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多項式，$P_n\to f$，在 Q 上均勻，當 $n\to\infty$。

對一般的定義域 $Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$，可仿上將 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 線性映射到 $[a_i,b_i]$ 上，即得：$\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ \mathbf{x}$ 的多項式 P 使

$$|f(\mathbf{x})-P(\mathbf{x})|<\epsilon,\ \forall\ \mathbf{x}\in Q$$

例. f 在 $[a,b]$ 上連續，若 $\displaystyle\int_a^b x^n f(x)dx = 0,\ \forall\ n = 0,1,2,\cdots$

試証；$f(x) = 0,\ \forall\ x \in [a,b]$

分析：

1. $\displaystyle\int_a^b x^k f(x) = 0,\ \forall\ k \Rightarrow \int_a^b P(x)f(x) = 0$，對一切多項式成立。

2. 根據 Weierstrass 逼近定理，給定 $\epsilon > 0,\ \exists$ 多項式 P 使
$$|f(x) - P(x)| < \frac{\epsilon}{M(b-a)}$$
其中 $M = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$.

3. 據 2.，
$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b f(x)(f(x) - P(x))dx \le \epsilon$$
ϵ 任意 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = 0$
f^2連續 $\ge 0 \Rightarrow f^2(x) = 0\ \forall\ x \in [a,b] \Rightarrow f = 0,\ \forall\ x \in [a,b]$

利用定理 13-7，可得到單位圓周上的三角多項式逼近定理，如下：

<u>定理 **13-8**</u>

設 T 表單位圓周，$f(\theta)$ 為定義於 T 上的連續函數，則 $f(\theta)$ 可以用三角多項式均勻地逼近，即：

$\forall\ \epsilon > 0$, 存在三角多項式
$$\tau(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)$$
使
$$|f(\theta) - \tau(\theta)| < \epsilon,\ \forall\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

分析：

1. f 在 $[0,\pi]$ 上連續，$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists$ 偶三角多項式
$$\tau(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos k\theta$$
使
$$|f(\theta) - \tau(\theta)| < \epsilon,\ \forall\ 0 \le \theta \le \pi$$

理由：考慮 $g(y) = f(\cos^{-1} y)$，$-1 \le y \le 1$

g 在 $[-1,1]$ 上連續，依定理 13-7，$\exists$ 多項式 $P(y)$ 使

$$|g(y) - P(y)| < \epsilon,\ 0 \le \theta \le \pi$$

而 $\cos^k \theta$ 可表為 $\cos j\theta, j = 0, 1, \cdots, k$ 的線性組合 (請同學自行推導)，

$$P(\cos\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$$

2. 據 1.，f 為 T 上的偶函數 $(f(-\theta) = f(\theta))$

   $\Rightarrow \exists$ 偶三角函數 τ 使 $|f(\theta) - \tau(\theta)| < \epsilon,\ \forall\ 0 \le \theta \le 2\pi$

3. 對任意函數 f，$f(\theta) + f(-\theta), [f(\theta) - f(-\theta)]\sin\theta$ 為偶函數。

   據 2.，$\exists$ 偶三角多項式 $\tau_1(\theta), \tau_2(\theta)$ 使

$$f(\theta) + f(-\theta) = \tau_1(\theta) + \alpha_1(\theta),\ |\alpha_1(\theta)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{9}$$

$$[f(\theta) - f(-\theta)]\sin\theta = \tau_2(\theta) + \alpha_2(\theta),\ |\alpha_2(\theta)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{10}$$

   $\forall\ 0 \le \theta \le 2\pi.$

4. $\frac{1}{2}[(9)\times\sin^2\theta + (10)\times\sin\theta]$ 得

$$f(\theta)\sin^2\theta = \tau_3(\theta) + \beta_1(\theta),\ \beta_1 = \frac{1}{2}[\alpha_1\cdot\sin^2\theta + \alpha_2\cdot\sin\theta],\ |\beta_1| < \frac{\epsilon}{2} \tag{11}$$

   同理，對函數 $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$，我們有

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin^2\theta = \tau_4(\theta) + \beta_2(\theta),\ |\beta_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

   變數變換：$\frac{\pi}{2} - \theta \to \theta$，有

$$f(\theta)\cos^2\theta = \tau_5(\theta) + \beta_2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{12}$$

   由於正餘弦函數有積化和差公式，上面 τ_3, τ_4, τ_5 為三角多項式。

5. (11)+(12) 得

$$\begin{aligned} &f(\theta) = \tau(\theta) + E(\theta) \\ &\tau(\theta) = \tau_4(\theta) + \tau_5(\theta) \text{ 為一三角多項式} \\ &|E| < |\beta_1| + |\beta_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Remark: f 在 T 上連續與 f 在 $[0,2\pi]$ 上連續有別，前者要求 $f(0)=f(2\pi)$，後者不做此要求。

例. f 在 T 上連續，滿足

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta\, d\theta = 0, \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta\, d\theta = 0,\ \forall\ k=0,1,2,\cdots$$

則 $f(\theta)=0,\ \forall\ 0\le\theta\le 2\pi$

此例的証明與上例同，不再重複。

B. Stone 的推廣 (Stone-Weierstrass 定理)

M.H.Stone (1903∼1989)，美國數學家，於 1948 年推廣了 Weierstrass 逼近定理，數學上稱為 Stone-Weierstrass 定理。

Stone 的推廣，與古典 Weiestrass 逼近定理的處理，是完全不同的思維。他把那形而下的多項式、三角多項式，抽離出它們的特性，稱為 Algebra。設 $\mathbf{X}$ 為一 compact metric space，$C(\mathbf{X})$ 為定義於 $\mathbf{X}$ 上的一切實連續函數，A 為 $C(\mathbf{X})$ 中的一個 Algebra，則 A 在 $C(\mathbf{X})$ 中稠密，簡單說，其內容如此。當然，A 必須再加上一個條件：它的元素必須夠多。什麼叫 Algebra？什麼叫夠多？讓我慢慢道來。

定義 **13-2** 設 $\mathbf{X}$ 為一 compact metric space，

$C(\mathbf{X})=\{f|f$ 為定義於 $\mathbf{X}$ 上的實連續函數 $\}$，$A\subset C(\mathbf{X})$, 稱 A 為一 Algebra 若：

(i) $1\in A$, (1 表取值恆為 1 的常函數)

(ii) $f\in A\Rightarrow cf\in A\ \forall\ c\in\mathbb{R}$

(iii) $f,g,\in A\Rightarrow f+g, f\cdot g\in A$

例 **1.** $\mathbf{X}=[0,1]$
$A_1=$ 一切多項式，為 $C[0,1]$ 中的一個 Algebra.
$A_2=$ 一切偶次多項式，為 $C[0,1]$ 中的一個 Algebra.
$A_3=$ 一切奇次多項式，並不夠成為一個 Algebra.
$A_4=$ 一切常函數，為 $C[0,1]$ 中的一個 Algebra.
$A_5=\{f|\ \exists\ n$ 使$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k e^{kx},\ 0\le x\le 1\}$ 為 $C[0,1]$ 中的一個 Algebra.

例 **2.** $\mathbf{X}=T$，單位圓周

$A=$ 一切定義於 T 上的三角多項式為一 Algebra.

定義 **13-3** $A \subset C(\mathbf{X})$ 為一 Algebra，我們稱 A 可以辨識相異點 (separate points) 若 $\forall\ x, y \in \mathbf{X},\ x \neq y,\ \exists\ f \in A$，使 $f(x) \neq f(y)$

打一個比方，A 如鷹眼，視力絕佳，不同事物它看得一清二楚。

一個 Algebra 無法辨識不同點，猶如一個人老花了，兩點看成一點。

以下就以鷹眼、老花來比喻它們。

例 **3.** 例 1. 中，A_1, A_2, A_5 為鷹眼集，A_4 為老花集。

例 **4.** $\mathbf{X} = [-1, 1]$

$A_2 =$ 一切偶次多項式，則 A_2 為老花集，因它看不出 $-x$ 與 x 的相異，
雖然 A_2 在 $[0, 1]$ 上為鷹眼，但在 $[-1, 1]$ 上則老花了。

例 **5.** T 表單位圓周，A 表一切定義於 T 上的三角函數，則 A 為鷹眼集。

例 **6.** 例 5. 中 T 改為 $[0, 2\pi]$，則 A 就老花了，因 $0 \neq 2\pi$，但 A 無法辨識它們。
(注意：在 T 中，$0, 2\pi$ 為同一點)

例 **7.** $\mathbf{X} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$

A 為一切定義於 $\mathbf{X}$ 上的多項式，則 A 為一 Algebra，且為鷹眼。

$A \subset C(\mathbf{X})$，A 為鷹眼，表示 A 中函數足夠多，有能力辨識相異點，老花表示函數不夠多，視網膜不佳，兩點看成一點，有待加強。

Lemma 13-1 $A \subset C(\mathbf{X})$ 為一 Algebra，則 $\bar{A}$ 亦為一 Algebra。

說明：$f, g \in \bar{A} \Rightarrow\ \exists\ f_n, g_n \in A$ 使

$$f_n \to f,\ g_n \to g,\ \text{在} C(\mathbf{X}) \text{上}$$

$\Rightarrow cf_n \to cf,\ f_n + g_n \to f + g,\ f_n \cdot g_n \to f \cdot g.$

$f_n, g_n \in A,\ A$ 為一 Algebra，$cf_n, f_n + g_n, f_n \cdot g_n \in A$，$\therefore cf, f+g, f \cdot g \in \bar{A}.$

<u>**Lemma 13-2**</u> $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists$ 多項函數 $P(x)$ 使

$$||x| - P(x)| < \epsilon,\ \forall\, x \in [-1, 1]$$

說明：這個 Lemma 等一下要用到，根據 Weierstrass 逼近定理，此乃 obvious。Stone 為了表示他論文的完整獨立性，另有証明，在此不提。

<u>定理 **13-9**</u> (Stone-Weierstrass 定理)

設 $\mathbf{X}$ 為一 compact metric space，$C(\mathbf{X})$ 表一切定義於 $\mathbf{X}$ 上的實連續函數
($f \in C(\mathbf{X}),\ \|f\| = \max\limits_{x\in\mathbf{X}} |f(x)|$，為 $C(\mathbf{X})$ 上的 norm)

$A \subset C(\mathbf{X})$ 為一鷹眼 Algebra，則 A 在 $C(\mathbf{X})$ 中稠密，即：

$$\text{給定 } f \in C(\mathbf{X}), \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, g \in A \text{ 使 } |f(x) - g(x)| < \epsilon,\ \forall\, x \in \mathbf{X}$$

証明：欲証 $\bar{A} = C(\mathbf{X})$，分幾個步驟如下

1. $f \in \bar{A} \Rightarrow |f| \in \bar{A}$

   理由：

   (i) 先設 $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbf{X}} |f(x)| \le 1$

   由 Lemma 13-2, $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists$ 多項式 P 使

   $$||t| - P(t)| < \epsilon$$

   $f \in \bar{A},\ \bar{A}$ 為一 Algebra$\Rightarrow P(f) \in \bar{A}$

   取 $t = f(x)$，有

   $$||f(x)| - P(f(x))| < \epsilon,\ \forall\, x \in \mathbf{X}$$

   $\Rightarrow |f| \in \bar{\bar{A}} = \bar{A}$

   (ii) 對一般的 $f, \exists\, c > 0$，使 $\|cf\| \le 1$.

   根據 (i)，$c|f| \in \bar{A}$，$\bar{A}$ 為一 Algebra$\Rightarrow$ $|f| = \dfrac{1}{c}(c|f|) \in \bar{A}$.

2. 定義

   $$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$$
   $$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

   $f, g \in \bar{A}$，則 $f \vee g, f \wedge g \in \bar{A}$.

   理由：

$$f \vee g = \frac{1}{2}(|f+g| + |f-g|)$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(|f+g| - |f-g|)$$

根據 1.，$f \vee g,\ f \wedge g \in A$

3. $f \in C(\mathbf{X}), \forall\, x, y \in \mathbf{X},\ \exists\, f_{x,y} \in \bar{A},$ 使 $f_{x,y} = f(x), f_{x,y} = f(y).$

理由：

x 給定，令 $g(z) = f(x),\ \forall\, z \in \mathbf{X},$ (g 為常函數)，則 $g \in \bar{A}.$

A 為鷹眼，$\therefore\ \exists\, h \in A$ 使 $h(x) \neq h(y)$

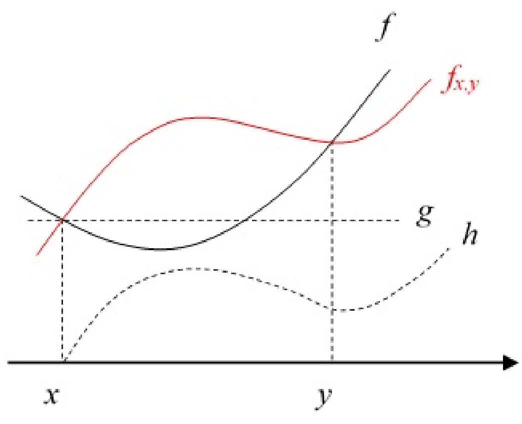
不妨設 $h(x) = 0$，否則考慮 $\tilde{h} = h - h(x)$

令 $f_{x,y} = g + \alpha h \in \bar{A}, \alpha$ 待取，且看：

$$f_{x,y}(x) = g(x) = f(x)$$
$$f_{x,y}(y) = g(y) + \alpha h(y) = f(x) + \alpha h(y)$$

欲使 $f_{x,y}(y) = f(y)$, 只要取 $\alpha = \dfrac{f(y) - f(x)}{h(y)}$。

$f_{x,y}$ 的尋覓，圖示如下：



4. 給定 $f \in C(\mathbf{X})$，欲尋覓 $g \in \bar{A}$ 使

$$f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in \mathbf{X}$$

(i) 先觀察右邊不等式

固定 x，對任意 $y \in \mathbf{X}$，$\exists\ f_{x,y} \in \bar{A}$ 使

$$f_{x,y}(x) = f(x), f_{x,y}(y) = f(y)$$

$f_{x,y}, f$ 在 y 點連續 $\Rightarrow\ \exists\ B_{\delta_y}(y)$ 使

$$f_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in B_{\delta_y}(y)$$

考慮 $\mathfrak{F}_1 = \{B_{\delta_y}(y) | y \in \mathbf{X}\}$，則 $\mathfrak{F}_1$ 為 $\mathbf{X}$ 上的一族 open covering，$\mathbf{X}$ 為 compact

$\Rightarrow\ \exists\ B_{\delta_1}(y_1) \cup B_{\delta_2}(y_2) \cup \cdots \cup B_{\delta_n}(y_n) \supset \mathbf{X},\ \delta_j = \delta_{y_j}$

每一 y_i 相應一函數 $f_{x,y_j} \in \bar{A}$，滿足

$$f_{x,y_j}(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in B_{\delta_j}(y_j)$$

令 $f_x(z) = \min\{f_{x,y_1}(z), f_{x,y_2}(z), \cdots, f_{x,y_n}(z)\}$

據 2.，$f_x \in \bar{A}$.

整理之：$f_x \in \bar{A},\ f_x(x) = f(x),\ f_x(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in \mathbf{X}$.

(ii) 現在讓 x 自由，希望建構左邊不等式。根據

$$f_x(x) = f(x) > f(x) - \epsilon$$

f, f_x 在 x 點連續 $\Rightarrow\ \exists\ B_{\delta_x}(x)$ 使

$$f(z) - \epsilon < f_x(z),\ \forall\ B_{\delta_x}(x)$$

考慮 $\mathfrak{F}_2 = \{B_{\delta_x}(x) | x \in \mathbf{X}\}$，則 $\mathfrak{F}_2$ 為 $\mathbf{X}$ 上的一族 open covering，$\mathbf{X}$ 為 compact

$\Rightarrow\ \exists\ B_{\delta_1}(x_1) \cup B_{\delta_2}(x_2) \cup \cdots \cup B_{\delta_m}(x_m) \supset \mathbf{X},\ \delta_j = \delta_{x_j}$

每一個 x_j，相應一函數 $f_{x_j} \in \bar{A}$，滿足

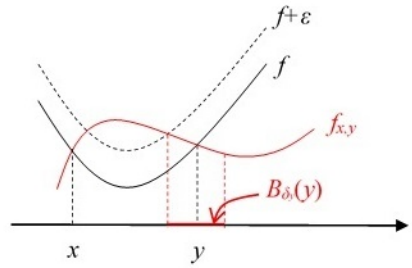
$$f(z) - \epsilon < f_{x_j},\ \forall\ z \in B_{\delta_j}(x_j)$$

令 $g(z) = \max\{f_{x_1}(z), f_{x_2}(z), \cdots, f_{x_m}(z)\},\ z \in \mathbf{X}$

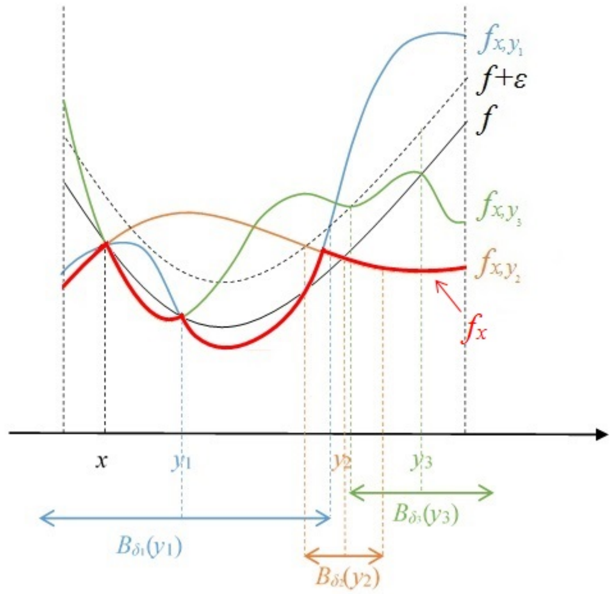
則 $g \in \bar{A}$，且滿足

$$f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in \mathbf{X}.$$

上面有關 f_x 的建構，圖示如下：



(a)



(b) 以 n=3 為例

短評：

從具象的多項式、三角多項式，抽離出他們的特性，提出 Algebra 的概念，把 Weierstrass 逼近定理推廣到一般 compact metric space 上的實連續函數空間上。

金剛經裡佛與須菩提有如下對話：

須菩提，於意云何，如來有肉眼不？
如是，世尊，如來有肉眼。

須菩提，於意云何，如來有天眼不？
如是，世尊，如來有天眼。

須菩提，於意云何，如來有慧眼不？
如是，世尊，如來有慧眼。

須菩提，於意云何，如來有法眼不？
如是，世尊，如來有法眼。

須菩提，於意云何，如來有佛眼不？
如是，世尊，如來有佛眼。

佛眼是什麼？我不敢妄言，不過 Stone 這個推廣，說他法眼獨具，並不為過。他能看出背後那個法，推陳出新，論述佳妙，值得品味學習。

有人常會問：讀數學有什麼用？
我要問：什麼叫做”用”？

它能開你的腦竅，啟你的慧眼，導你的法眼，難道還不夠你”用”嗎？

有人說：什麼竅，什麼眼，都沒用，錢最有用！

據我的觀察，這樣的人通常是渾渾噩噩過此一生，飢渴難耐，可是又找不到水喝。少數祖上積德，擁有錢財，也不知道該怎麼”用”，欠缺智慧和人生價值去管理那財富，災難就在得意處滋生，逐慾害身，禍延子孫者比比皆是，還有什麼富貴可言？

就在不久前，有人將大把的百元美鈔往馬桶裡丟，沖！沖！沖!!! 糟糕，馬桶宣洩不了，堵住了！到庭院去！金紙桶、打火機，來，點火，快！大把大把的美鈔當金紙燒，那百元美鈔並非一般的紙張，燃燒起來味道特別辛辣，煙霧黑濃，嗆得呼吸困難，淚水直流，薰得滿頭灰黑，一身是汗。還這麼多，要燒到何時？有了，蓮花池，挖！挖！挖！快!!!
這也是一種人生，後悔莫及的人生。
子曰：富與貴，是我所欲也，不以其道得之，不處也。
這樣的人，俯仰無愧於天地，能長能久。

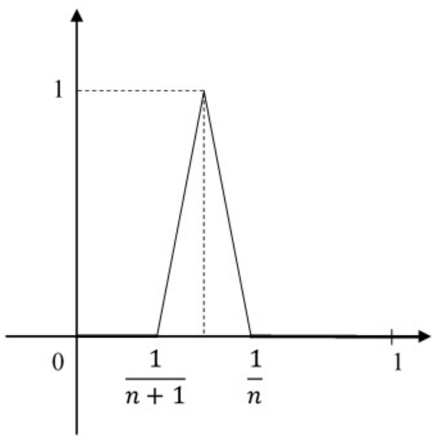
13.7 Arzela-Ascoli 定理

在 $\mathbb{R}^n$ 中，我們有 B-W 定理：

$$\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n,\ |\mathbf{x}_k| < M,\ \forall\ k \Rightarrow \{\mathbf{x}_k\}\ \text{有收斂子序列。}$$

這件事在無窮維空間中並不成立，例如在 l^2 中，$\mathbf{x}_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$，1 出現在第 k 坐標，$\|\mathbf{x}_k\| \leq 1,\ \forall\ k$，但 $\{\mathbf{x}_k\}$ 並無收斂子序列。

在 $C[0,1]$ 中，令 f_n 如下圖所示：



則 $\|f_n\| \leq 1,\ \forall\ n$，但 $\|f_m - f_n\| = 1,\ \forall\ m, n$

$\therefore \{f_n\}$ 在 $C[0,1]$ 中無收斂子序列。

所謂 Arzela-Ascoli 定理就是對 $C[a,b]$ 上的函數列，給出適當條件，以確保它有均勻收斂 ($C[a,b]$ 上的收斂) 子序列。

G.Ascoli(1843∼1896) 和 C.Arzela(1847∼1912) 是兩位義大利數學家，他們獨立地分別思考此問題，並各自有不同的貢獻，於 1880 年代提出一致連續 (equi-continuity) 的概念。我們今天把它們二位的結果綜合整理成一定理，數學上稱之為 Arzela-Ascola 定理。

定義 **13-4** 一致連續 (equi-continuity)

$\mathfrak{F} \subset C[a,b]$，稱 $\mathfrak{F}$ 在 $[a,b]$ 上一致連續若對任意 $\epsilon > 0,\ \exists\ \delta$，只與 ϵ 有關，使

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon,\ \forall\ x, y \in [a,b],\ \forall\ f \in \mathfrak{F}$$

Remark: $f \in \mathfrak{F} \subset C[a,b]$，則 f 在 $[a,b]$ 上均勻連續。

給定 $\epsilon > 0,\ \exists\ \delta$, 使

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon,\ \forall\ x \in [a,b] \cdots (*)$$

不同的 f，有不同的 δ，如果能夠找到一個 δ，使 $(*)$ 式對所有 $f \in \mathfrak{F}$ 成立，即 $\mathfrak{F}$ 中函數的連續行為一致，我們稱 $\mathfrak{F}$ 為一致連續。

例 **1.** $\mathfrak{F} = \{f||f'(x)| \leq M,\ \forall\ x \in [a,b]\}$

則
$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| < M|x-y|$$
因此，給定 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$，則

$$|f(x) - f(y)| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon,\ 當|x-y| < \delta$$

故 $\mathfrak{F}$ 為一致連續。

例 **2.** $\mathfrak{F} = \{f|\int_a^b f'^2(x)dx \leq M,\ f'\ \text{conti. on}\ [a,b]\}$

根據微積分基本定理，

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\int_y^x f'(t)dt\right| \\ &\leq \left(\int_y^x f'^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_y^x 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M^{\frac{1}{2}} \cdot |x-y|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

給定 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\epsilon^2}{M}$，則有：

$$"|f(x) - f(y)| < \epsilon,\ 當|x-y| < \epsilon",\ \forall\ f \in \mathfrak{F}$$

故 $\mathfrak{F}$ 在 $[a,b]$ 上一致連續。

由上兩例，我們似乎可以感覺到一致連續和導數有點關係，我們再給一個例子：

稱 f 在 $[a,b]$ 上為 Hölder continuous of order $\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$

若，$\exists\ M > 0$ 使
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha,\ \forall\ x,y \in [a,b]$$
$\alpha = 1$，稱 f 為 Lipchitz continuous.

這個 M，稱為 f 在 $[a,b]$ 上的一個 Hölder bound.

一組函數若有共同的 Hölder bound，則它們為一致連續。明確陳述如下：

例 **3.** $\mathfrak{F} = \{f| \sup_{x,y\in[a,b]} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \le M\}$

則 $\mathfrak{F}$ 在 $[a,b]$ 上一致連續。

就讓同學自己比劃比劃吧。

<u>定理 **13-10**</u> (Arzela-Ascoli 定理)

$\{f_n\} \subset C[a,b]$，滿足

(i) $\{f_n\}$ is uniformly bounded on $[a,b]$
($\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界)
即：$\exists\ M$ 使 $|f_n(x)| < M\ \forall\ x \in [a,b],\ \forall\ n = 1,2,3.$

(ii) $\{f_n\}$ is equi-continuous on $[a,b]$ (一致連續)

則 $\{f_n\}$ 有子序列在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

Remark: 通常 uniformly 是指" 一族" 函數，對空間各點具有某相同性質，中文翻作均勻，翻得很好。嚴格講，條件 (i) 應該稱作"equi-bounded"，中文稱它為一致有界，比較恰當。

非洲的牛羚要渡河，奮力一跳，奔像前方的草原，行動一致。
深秋楓紅，寒氣逼人，群雁南飛，千里雁行，行動一致。

f_n 在 $[a,b]$ 上連續。

1. 因此，對每一個固定的 n，f_n 在 $[a,b]$ 有界，若存在 M，使 $|f_n(x)| \le M\ \forall\ x \in [a,b],\ \forall\ n$，我們稱 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界。

   這是把每一個 f_n 看作一隻牛羚，或一隻雁子，他們行為一致。

2. 固定 $x \in [a,b]$，觀察集合 $\{|f_n(x)| : n = 1,2,3,\cdots\}$，若存在 M_x，使 $|f_n(x)| \le M_x\ \forall\ n = 1,2,3,\cdots$，我們稱 $\{f_n\}$ 在 x 點有界。

這是把函數族套到 x 點上，得一集合，此集合有界，然後讓 x 在 $[a,b]$ 上跑，若對空間上的每一點，都可找到一個共同的上界，我們 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均勻有界。

1, 2 是等價的，就看你從函數本身（每一隻牛羚或雁子）去看空間的每一點或從空間的每一點去看函數族。

我覺得牛羚度河、群雁南飛比叫生動活潑。

不過語言是約定成俗，一開始這樣稱呼它，沿襲下來，就成傳統，心裡明白就好。

Arzela-Ascoli 定理在現代分析學上是個非常重要的定理，尤其在處理常微分方程式、偏微分方程式，解的存在問題上，是個常用的工具。因其重要，我在這裡介紹兩個証明方法，觀點不同，各有千秋。希望同學們能從中學習到一點東西。

証一 (羅漢降龍)

1. $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界：$-M \leq f_n(x) \leq M,\ \forall\ x \in [a,b]$

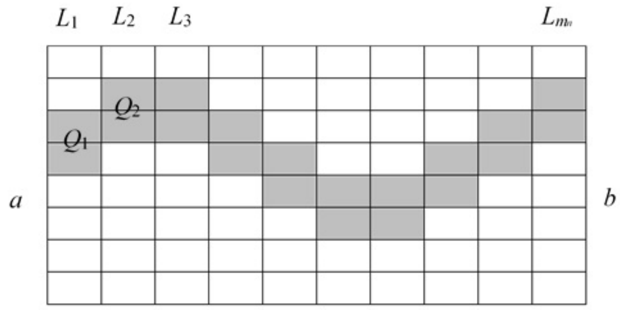
   把 $[-M,M]$ 2^{n+1} 等分，令 $\epsilon = \dfrac{M}{2^n}$

2. $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致連續，對此 $\epsilon,\ \exists\ \delta$ 使

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon,\ 當|x-y| < \delta,\ \forall\ n = 1,2,3,\cdots$$

3. 把 $[a,b]$ m_n 等分使每一等分 $< \delta$

$[-M, M]$ 的水平等分線和 $[a, b]$ 的鉛直等分線把 $[a, b] \times [-M, M]$ 分割成許多小方塊，如圖所示：



4. 設 $L_1, L_2, \cdots, L_{m_n}$ 分別表此分割的第一、第二、$\cdots$、第 m_n 個鉛直長條。即：$L_i = [x_{i-1}, x_i] \times [-M, M]$, $[x_{i-1}, x_i]$ 表對 $[a, b]$ 作分割而成的第 i 個小區間。

觀察：

(i) $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon, \ \forall \ x, y \in [x_0, x_1]$
$\therefore f_n$ 在 L_1 上頂多可以" 住兩層樓"(上下跨越兩格)
而 L_1 中上下相鄰的兩層樓閣有窮，函數 $\{f_n\}$ 無窮，故存在上下相連的二層樓閣，住有無窮多個函數，令其為 Q_1，如圖所示。

(ii) 這些 Q_1 中的函數由 L_1 進入 L_2，因

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon, \ \forall \ x, y \in [x_1, x_2]$$

所以它們頂多只能再上層樓或再下層樓，即它們在 L_2 中只能住進上下相連的四個格子內。

因此，存在上下相連的兩格 Q_2，住著無窮多的這些函數族，如圖所示。

(iii) 依此類推，直到 L_{m_n}，得斜線域

$$A_n = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{m_n}$$

A_n 含 $\{f_n\}$ 中無窮多函數。

5. 重複上述論述於 A_n 中，得 $A_{n+1} \subset A_n$，

依此類推得斜線域方格

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$$

A_{n+1} 含 A_n 中無窮多函數，於 A_1 中任取一函數 $g_1 = f_{n_1}$，於 A_2 中任取一函數 $g_2 = f_{n_2}, n_2 > n_1$，依此類推，以致無窮，得 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{g_n\}$.

6. $\{g_n\}$ 即為所求，

$$|g_m(x)-g_n(x)| < 2\cdot\frac{M}{2^N}=\frac{M}{2^{N-1}},\ \forall\, x\in[a,b],\ \text{當} m,n>N$$

給定 $\epsilon>0$, 取 N 夠大，使 $\dfrac{M}{2^{N-1}}<\epsilon$，依 Cauchy's criterion,$\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

證二 (天女散花)

1. $[a,b]$ 中有稠密點列 (天女所散的花)，例如有理點列，令其為 $\{r_1,r_2,\cdots\}$
2. $\{f_n(r_1)\}_{n=1,2,\cdots}$ 有界，因此有收斂子點列，令其為 $f_{1,1}(r_1),f_{1,2}(r_2),f_{1,3}(r_3),\cdots$
3. $\{f_{1,n}(r_2)\}_{n=1,2,\cdots}$ 有界，因此有收斂子點列，令其為 $f_{2,1}(r_2),f_{2,2}(r_2),f_{2,3}(r_3),\cdots$
4. $\{f_{2,n}(r_3)\}_{n=1,2,\cdots}$ 有界，因此有收斂子點列，令其為 $f_{3,1}(r_2),f_{3,2}(r_2),f_{3,3}(r_3),\cdots$
5. 依此類推以致無窮，得函數列 $\{f_{j,n}\}$，滿足

   (i) $\{f_{j+1,n}\}\subset\{f_{j,n}\}$

   (ii) $\{f_{j,n}(r_j)\}_{n=1,2,\cdots}$ 收斂。

   取對角線函數 $f_{n,n}$，令 $g_n=f_{n,n}$，則

$$\lim_{n\to\infty} g_n(r_j)\ \text{存在}\ \forall\, j$$

6. 到目前為止，我們還沒有用到 $\{f_n\}$ 的一致連續性，

   這個條件將用來保証 $\{g_n\}$ 均勻收斂。

   理由如下：

   $\{g_n\}$ 為一致連續，給定 $\epsilon>0$, $\exists\,\delta$ 使 $|g_n(x)-g_n(y)|<\dfrac{\epsilon}{3}$, 當 $|x-y|<\delta$, $\forall\, n$

   考慮 $\mathfrak{F}=\{(r_j-\delta,r_j+\delta)|j=1,2,3,\cdots\}$

   則 $\mathfrak{F}$ 為 $[a,b]$ 上的一族開覆蓋，根據 Heine-Borel 定理，$\exists$ 有窮開覆蓋，設其為

$$(r_{j_1}-\delta,r_{j_1}+\delta),(r_{j_2}-\delta,r_{j_2}+\delta),\cdots,(r_{j_k}-\delta,r_{j_k}+\delta)$$

   $\{g(r_{j_i})\}$ 收斂，對此 $\epsilon>0$, $\exists\, N_i$ 使

$$|g_n(r_{j_i})-g_m(r_{j_i})|<\epsilon,\ \text{當} m,n>N_i$$

   取 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_k\}$，則

$$|g_n(r_{j_i})-g_m(r_{j_i})|<\epsilon,\ \forall\, i=1,2,\cdots,k,\ \text{當} m,n>N$$

$x \in [a,b] \Rightarrow x \in (r_{j_i} - \delta, r_{j_i} + \delta)$, for some i

於是：

$$\begin{aligned}|g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(r_{j_i})| + |g_n(r_{j_i}) - g_m(r_{j_i})| + |g_m(r_{j_i}) - g_m(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,\ \forall\, x \in [a,b],\ 當 m,n > N\end{aligned}$$

依 Cauchy's criterion, $\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

Remark: 羅漢降龍從 $\mathbb{R}^2$ 上的特性下手，空間平直，可以畫格子降龍，這個方法可以推廣到 $\mathbb{R}^n$ 上。

天女散花從 $[a,b]$ 中有可數稠密點著手，稠密是 Topology 性質，與空間的平直性無關，這個方法可以推廣到一般的 metric space 上。

你喜歡哪一個？

把天女散花中的要素抽離出來，Arzela-Ascoli 定理可以推廣到下列的空間上：

定義 **13-5** 設 $(\mathbf{X}, d)$ 為一 metric space，稱 $\mathbf{X}$ 為 separable 若 $\mathbf{X}$ 有 countable dense subset.

稱 $\mathbf{X}$ 具有 Bolzano-Weierstrass 特性，若 $\mathbf{X}$ 中任意有界點列都有收斂子點列。

設 $f_n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},\ (\mathbf{X}, d)$ separable，$(\mathbf{Y}, \rho)$ 具有 B-W 特性，

稱 $\{f_n\}$ 為 equi-continuous，若 $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta$ 使

$$\rho(f_n(x), f_n(y)) < \epsilon,\ 當 d(x,y) < \delta,\ x, y \in \mathbf{X},\ \forall\, n$$

據此，Arzela-Ascoli 定理可推廣成：

<u>定理 **13-11**</u>

設 $(\mathbf{X}, d)$ 為 separable metric space,
$(\mathbf{Y}, \rho)$ 具有 B-W 性質的 metric space，

$f_n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 為一致連續函數族，且在 $\mathbf{X}$ 上一致有界，則 $\{f_n\}$ 有收斂子序列，此子序列在 $\mathbf{X}$ 的任意 compact subset $K \subset \mathbf{X}$ 上均勻收斂。

關於定理 13-11 的論証，就留給同學當習題吧。

定理中的 $(\mathbf{Y}, \rho)$，常碰到的是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$，$\mathbb{C}$ 為複數系，很實際。

又任意 compact metric space 都可找到 countable dense subset(習題)，因此為 separable，定理 13-11 成立，因其常被引用，我把他陳述於下：

系 設 $(\mathbf{X}, d)$ 為 compact metric space, $(\mathbf{Y}, \rho)$ 為具有 B-W 性質的 metric space

$f_n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},\ n = 1, 2, 3, \cdots$ 為一致連續，且一致有界的連續函數列，

則 $\{f_n\}$ 有子序列在 $\mathbf{X}$ 上均勻收斂。

關於這個系的証明，我也把它留給同學當習題。

(第十三章全文完)