Chapter 5

$\mathbb{R}^n$ 中的 Topology

5.1 Compact 概念的誕生

上一章裏，我們打通了微積分的督脈，積分的存在問題得到了解決。
督脈之通，出現了影響近代數學既深且遠的定理－ **Heine Borel** 定理：

若 $[a, b]$ 被一族開區間 $\mathcal{F}$ 所覆蓋，則 $[a, b]$ 可被 $\mathcal{F}$ 中有窮個開區間所覆蓋。

這就是近代數學 **Compact** 概念的由來。
Compact 有什麼好？
好處多矣！無窮化有窮，有窮則可「從心所欲，不踰矩」。
什麼叫不踰矩？在一堆正數中想取最大值，最大值就來；想取最小值，最小值即得。最大值 $< \infty$，最小值 > 0，叫不踰矩。你說：無窮集我也可以隨心所欲，取 inf，取 sup。不過你要知道，你的 inf 可能是 0，sup 可能是無窮大，踰矩矣！
不踰矩，就可以幫助我們處理許多問題。孔子讚美管仲說：微管仲，吾其披髮左衽矣！借用孔子的話：微 compact，近代數學，其當機矣！
沒有管仲，只不過被髮左衽，還能吃飯睡覺。沒有 compact，則近代數學要當機，不能運轉了，可見其重要性。
我這樣子形容 compact，同學們不要以為誇張，請你們一定要相信它的重要性，用心體會，吸收消化，將來才能乘雲霧，駕輕舟，遊走於數學的天地裡，了無障礙。屈原在離騷中這樣描述：
「飲余馬於咸池兮，總余轡乎扶桑；折若木以拂日兮，聊逍遙以相羊。」
道理通了，天地任我遨遊，何等開心之事。

5.2 Topology

原住民有豐年祭，男女老少手牽手圍著薪火，呼喚祭禮，唱歌跳舞，盡管圈子忽大忽小，時扁時圓，但是彼此的相關位置不變，鄰居還是鄰居。

麵包師傅把麵粉和水搓揉成一團待酵的麵糰，把它放到碗裡，它就是碗形，放入方形容器裡它就是方形，放入柱形容器裡它又近於柱形；形狀雖變了，但麵粉之間相關位置並沒改變，鄰居還是鄰居。

你把那麵糰表面塗上不同顏色，覆蓋整個麵糰，隨意放置，麵團因勢變形，那著色的區塊也跟著變形，但彼此相關位置不變，仍然覆蓋那麵團表面。

所謂 Topology，就是在探討相鄰關係不變下，物件的內蘊性質。Topology 一詞，中文譯作拓樸學，是音譯，日文譯作位相學，是意譯，翻譯得很傳神。

例如立方體上，頂點數 -邊數 + 面數 = 2，一切多面體皆具此性質，稱為 Euler 特徵數。在 Topology 的眼光下，球和這些多面體無異，因此球的 Euler 特徵數是 2。輪胎和立方體上下貫空一方柱無異，它的 Euler 特徵數是 0。馬克杯也和輪胎體無異，它們的 Euler 特徵數都是 0。

有人頭上有兩個髮漩。民間普遍有一種說法：這樣的人脾氣壞。數學家說，每個人身上的毛髮場至少有兩個漩，只不過它剛好出現在頭上，人因毛少，又穿衣服，不易觀察，如果你家裡有短毛犬，或你有機會接近牛或馬，你就可以觀察到他們身上有好多的漩。脾氣壞與漩的多寡、位置有沒有直接關係？數學家持保留態度。

動物身上的毛髮場可看成球面的向量場，漩就是那向量迷失之處。輪胎上的向量場可以無漩，這就是它們拓樸性質不同之處。球面上的連續向量場至少有兩個漩。

5.3 $\mathbb{R}^n$ 中的 open set

Topology 的要點既然在鄰域關係，什麼是鄰域？簡單說，不孤立，盡管形狀變了，你的附近總是環繞著你熟識的人，這些伴你而居的人就是你的鄰域。

什麼是附近？$\mathbb{R}^n$ 中因有歐氏測距，「附近」也就不難定義了。

Definition 5.3.1 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$，定義

$$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r\} \tag{1}$$

稱為以 $\mathbf{x}$ 為心，半徑 r 的開球（open ball）；

$$C_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \le r\} \tag{2}$$

稱為以 $\mathbf{x}$ 為心，半徑 r 的閉球（closed ball）。

其中 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = (\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2)^{1/2}$,$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$,$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots y_n)$，表 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 兩點的歐氏距離。

Definition 5.3.2 $V \subset \mathbb{R}^n$ 稱為開集（open set），若且為若對任意 $\mathbf{x} \in V$ 恆存在 $r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}) \subset V$。

例： $\emptyset$ 為開集，$\mathbb{R}^n$ 為開集。$(0,1)$,$(-\infty,0)$,$(1,\infty)$ 均為 $\mathbb{R}$ 中的開集。$B_r(\mathbf{x})$,$r>0$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的開集。

Definition 5.3.3 $F\subset\mathbb{R}^n$ 為閉集（closed set）若且為若 F^c 為開集。

例： $\emptyset$ 為閉集，$\mathbb{R}^n$ 為閉集。$[0,1]$,$(-\infty,0]$,$[1,\infty)$ 均為 $\mathbb{R}$ 中的閉集。$C_r(\mathbf{x})$,$r>0$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的閉集。Cantor set 為 $\mathbb{R}$ 中的閉集。

閉集與開集具有如下的特性，此特性為用已定義一般點集上 Topology 的基礎。

Theorem 5.3.4

(a) 任意開集的聯集恆為開集。

(b) 有窮個開集的交集恆為開集。

證： (a) 設 $\{V_\lambda\}$,$\lambda\in\Lambda$ 為一族開集，$A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$。

$\mathbf{x}\in A\ \Rightarrow\ \exists\lambda\in\Lambda$ 使 $\mathbf{x}\in V_\lambda$

V_λ 為 open $\Rightarrow\exists r>0$ 使 $B_r(\mathbf{x})\subset V_\lambda\subset A$

$\therefore A$ 為 open $\square$

(b) 設 $V_1,V_2,\cdots V_n$ 為 open，$B=\bigcap_{i=1}^n V_i$。

$\mathbf{x}\in B\ \Rightarrow\ \mathbf{x}\in V_i\ \forall i$

V_i open $\Rightarrow\exists r_i>0$ 使 $B_{r_i}(\mathbf{x})\subset V_i$

取 $r=\min\{r_1,r_2,\cdots r_n\}$，則 $B_r(\mathbf{x})\subset B_{r_i}(\mathbf{x})\subset V_i\ \forall i=1,2,\cdots n$

$\Rightarrow B_r(\mathbf{x})\subset\bigcap_{i=1}^n V_i=B$

$\therefore B$ 為 open $\square$

對定理 5.3.4 中的開集取補集，我們馬上得到：

Theorem 5.3.4

(a) 任意閉集的交集恆為閉集。

(b) 有窮個閉集的聯集恆為閉集。

Remark:

(i) 無窮開集的交集未必為開集，例如 $I_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ 為開集 $\forall n=1,2,\cdots$，但 $\bigcap_{n=1}^\infty I_n=\{0\}$ 非開集。

(ii) 無窮個閉集的聯集未必為閉集，例如 $J_n=[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]$ 為閉集，但 $\bigcup_{n=1}^\infty J_n=(0,1)$ 為開集。

Definition 5.3.4 設 $A\subset\mathbb{R}^n$，

(a) $\mathbf{x} \in A$ 稱為 A 的內點（interior point）若 $\exists r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}) \subset A$。

(b) $A^\circ = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}$為 A 的內點$\}$ 稱為 A 的內集（the interior of A）。

例：

$A = [0, 1],\ A^\circ = (0, 1)$

$A = [0, 1]$ 中的有理點集，$A^\circ = \emptyset$

$A = [0, 1]$ 中的 Cantor set，$A^\circ = \emptyset$

Theorem 5.3.3 $A \subset \mathbb{R}^n$，A° 恆為開集。

證： $\mathbf{x} \in A^\circ$，即 $\mathbf{x}$ 為 A 的 interior point $\Rightarrow \exists r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}) \subset A$。
$\forall \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x})$，取 $\delta = \frac{1}{2}(r - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|)$
則 $B_\delta(\mathbf{y}) \subset B_r(\mathbf{x}) \subset A$
$\therefore \mathbf{y}$ 為 A 的 interior point，$\forall \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x})$
$\Rightarrow B_r(\mathbf{x}) \subset A^\circ \therefore A^\circ$ 為 open $\square$

Definition 5.3.5 $A \subset \mathbb{R}^n$，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 稱 A 的 limit point，若 $B_r(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\} \neq \emptyset\ \forall r > 0$。
Remark:

(i) $B_r(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\} \neq \emptyset\ \forall r > 0$。對 $r_1 = 1$，任取 $\mathbf{x}_1 \in B_{r_1}(\mathbf{x}) \cap A\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}$。對 $r_2 = \frac{1}{2}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}| > \frac{1}{2}$ 任取 $x_2 \in B_{r_2}(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\}$，則 $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1, \mathbf{x}$。對 $r_3 = \frac{1}{2}|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}| < \frac{1}{2^2}$ 任取 $\mathbf{x}_3 \in B_{r_3}(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\}$，則 $\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}$。依此類推，以致無窮，得相異點列$\{\mathbf{x}_n\} \subset A$，$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ 當 $n \to \infty$。

(ii) limit point 有的書叫做 accumulation point，有的稱它為 cluster point，我姑稱之為匯聚點，他是點集的概念，與一般極限的 limit 有點差別。例如數列：$\{x_n\} = \{0, 1, 1, 1 \cdots\}$，$x_1 = 0,\ x_n = 1\ \forall n > 1$，$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$。此數列的點集只有兩點 $A = \{0, 1\}$，1 非 A 的 limit point。sequence 的 limit 和集合的 limit point 有別，同學宜注意。

整理之：$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 為 A 的 limit point $\Leftrightarrow \exists \{\mathbf{x}_n\} \subset A$，$\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j\ \forall i \neq j$，使 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$。

Definition 5.3.6 $\mathbf{x} \in A$ 稱為 A 的孤立點（isolated point）若存在 $r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\} = \emptyset$（即 $B_r(\mathbf{x}) \cap A = \{\mathbf{x}\}$）。因此，任何 A 的孤立點都不是 A 的 limit point.

Definition 5.3.7 設 $A \subset \mathbb{R}^n$，

$$A' = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}\text{為 } A \text{ 的 limit point}\} \tag{3}$$

稱為 A 的 **derived set**，我姑且稱之為匯聚點集。

Theorem 5.3.7 $A \subset \mathbb{R}^n$ 為 closed $\Leftrightarrow A \supset A'$

證： (⇒) A 為 closed ⇒ A^c 為 open。設 $\mathbf{x} \in A'$，即 $\mathbf{x}$ 為 A 的 limit point，則 $\mathbf{x} \notin A^c$
$\Rightarrow \mathbf{x} \in A \therefore A \supset A'$

(⇐) 欲証 A 為 closed，即証 A^c 為 open。$\mathbf{x} \in A^c$，由於 $A \supset A'$，$\therefore$ $\mathbf{x}$ 非 A 的 limit point
$\Rightarrow \exists \delta > 0$ 使 $B_\delta(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\} = \emptyset$。$\mathbf{x} \notin A \therefore B_\delta(\mathbf{x}) \cap A = \emptyset$，即 $B_\delta(\mathbf{x}) \subset A^c \therefore A^c$ 為 open。□

Theorem 5.3.8 A' 為閉集 $\forall A \subset \mathbb{R}^n$。

證： (i) 若 $A' = \emptyset$ 顯然 A' 為閉集。

(ii) 若 $A' \neq \emptyset$，我們想証 $A' \supset (A')'$，則依定理 5.3.7，A' 為 closed。
令 $\mathbf{x}_0$ 為 A' 的 limit point，則 $B_r(\mathbf{x}_0) \cap A' - \{\mathbf{x}_0\} \neq \emptyset\ \forall r > 0$。任取 $\mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}_0) \cap A'$ $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$. $\mathbf{y} \in A' \Rightarrow B_\delta(\mathbf{y}) \cap A - \{\mathbf{y}\} \neq \emptyset\ \forall \delta > 0$。取 δ 夠小，使 $B_\delta(\mathbf{y}) \subset B_r(\mathbf{x}_0)$ 且 $\mathbf{x}_0 \notin B_\delta(\mathbf{y})$，例如 $\delta = \frac{1}{2}\min\{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|, r - |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|\}$。則 $\exists \mathbf{z} \in B_\delta(\mathbf{y}) \cap A\ \mathbf{z} \neq \mathbf{y}, \mathbf{x}_0$
$\Rightarrow \mathbf{z} \in B_r(\mathbf{x}_0) \cap A - \{\mathbf{x}_0\}$
故 $B_r(\mathbf{x}_0) \cap A - \{\mathbf{x}_0\} \neq \emptyset\ \forall r > 0$，$\therefore \mathbf{x}_0$ 為 A 的 limit point，即 $\mathbf{x}_0 \in A' \therefore A' \supset (A')'$ 得証。□

有一句話說：投之以桃，報之以李。$\mathbf{y}$ 是桃，$\mathbf{z}$ 是李，李是 $B_r(\mathbf{x}_0)$ 所想要的。

例： $A_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ $A' = \{0\}$ $0 \notin A_1 \therefore A_1$ 非 closed。

$A_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \text{為有理數}\}$，$A_2' = [0, 1] \times [0, 1]$ $A_2 \not\supset A_2' \therefore A_2$ 非 closed。

$A_3 =$ 自然數集，$A_3' = \emptyset$ $A_3 \supset A_3' \therefore A_3$ 為 closed。

$A_4 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \frac{1}{x},\ x > 0\}$，點 $(0, 1) \in A_4'$ 但 $(0, 1) \notin A_4 \therefore A_4$ 非 closed。

Definition5.3.8 $\bar{A} = A \cup A'$ 稱為 A 的閉包（**closure**）。
Theorem 5.3.9 $\bar{A}$ 為 closed。

證： 設 $\mathbf{x}$ 為 $\bar{A}$ 的 limit point，則

(i) $\mathbf{x}$ 為 A 的 limit point，或

(ii) $\mathbf{x}$ 為 A' 的 limit point

若 (i) 成立，則 $\mathbf{x} \in A' \Rightarrow \mathbf{x} \in \bar{A}$
若 (ii) 成立，因 A' 為 closed $\therefore \mathbf{x} \in A' \subset \bar{A}$
$\therefore \mathbf{x} \in \bar{A}$ 故 $\bar{A}$ 為 closed。□

Remark: 許多書上定義 $\bar{A}=\bigcap\{F|F\text{為 closed}, F\supset A\}$。此二定義是等價的，請同學自行證明之。

Definition 5.3.9 A 為 **perfect**，若 $A=A'$。

Perfect 意思是完美，太好了，$A=A'$！

$\mathbf{x}\in A\Leftrightarrow \mathbf{x}$ 為 A 的 limit point！

不過這是數學上的稱呼，不要帶有感情，難道 $[0,1]$ 完美，(0,1) 就不完美了嗎？我看 $(0,1)$ 也很完美，少了邊界上那兩點，他倒自成一天地！

例： $[0,1]$, $[0,\infty)$, $(-\infty,0]$ 都是 perfect。

$C_r(\mathbf{x})$, $r>0$ 為 perfect。

$B_r(\mathbf{x})$, $r>0$ 非 perfect。

$\mathbb{N}$ 自然數集非 perfect。

$\mathbb{R}^n$ 為 perfect，任意 $\mathbb{R}^n$ 中的有窮點集都非 perfect。（事實上 $\mathbb{R}^n$ 中的 Countable 點集皆非 perfect，請見定理 5.3.10）

Cantor set 如何？$\mathbb{R}^n$ 中的 Cantor set 都是 perfect！以下僅以 $\mathbb{R}^2$ 為例說明之。

Lemma 5.3.1 $[0,1]$ 中的 Cantor set E 為 perfect。

分析：

1. 從 $[0,1]$ 中，第一次挖走 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 這區間。
2. 第二次又分別自 $[0,\frac{1}{3}]$ 中挖走 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$，自 $[\frac{2}{3},1]$ 中挖走 $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$。餘集
$$F_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$$
3. 依此類推，以致無窮，設第 n 次的餘集為
$$F_n=\bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j},\quad I_{n,j}=[a_{n,j},b_{n,j}]$$
則 Cantor set $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$
4. $x\in E\Rightarrow x\in F_n\ \forall n\Rightarrow$ 對任意 n $\exists j$ 使 $x\in[a_{n,j},b_{n,j}]$
取 $x_n=a_{n,j}\in E$, $|I_{n_j}|=|b_{n,j}-a_{n,j}|=\frac{1}{3^n}\to 0$
$\therefore |x_n-x|<|I_{n_j}|\to 0$ 當 $n\to\infty$
$\therefore x$ 為 E 的 limit point，即 $E\subset E'$
5. 又 E 為 closed，$E'\subset E$ $\therefore E=E'$，perfect！□

Proposition 5.3.1 $\mathbb{R}^2$ 中的 Cantor set 為 perfect。
分析：有兩種處理方式

(a) 仿照 R 中的論述。

(b) $E^2 = E \times E$，E 為 $[0,1]$ 中的 Cantor set。上例中已証 E 為 perfect，你可以試著證明：A, B 為 perfect，$A, B \neq \emptyset$，$A, B \subset \mathbb{R}$，則 $A \times B$ 為 $\mathbb{R}^2$ 中的 perfect set。此處留給同學當習題。

Remark: 上述 (a) 跟 (b) 兩個方法都可推廣到 $\mathbb{R}^n$ 中。故 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cantor set 為 perfect set。

Theorem 5.3.10 $\mathbb{R}^n$ 中的非空 perfect set 恆為 uncountable。
分析：設 A 為 $\mathbb{R}^n$ 中的 perfect set

1. $A \neq \emptyset \therefore \exists \mathbf{a} \in A$。$A$ 為 perfect set $\therefore \mathbf{a}$ 為 A 的 limit point，故 $B_{r_0}(\mathbf{a})$ 含 A 中無窮點。任取 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in B_{r_0}(\mathbf{a}) \cap A - \{\mathbf{a}\}$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$

2. $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$, A 為 perfect $\therefore \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ 為 A 的 limit point，仿上論述，取 $r_1 < \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|\}$，則 $B_{r_1}(\mathbf{x}_0) \cap B_{r_0}(\mathbf{x}_0) = \emptyset$ 且 $\exists \mathbf{x}_{0,0}, \mathbf{x}_{0,1} \in B_{r_1}(\mathbf{x}_0) \cap A - \{\mathbf{x}_0\}, \mathbf{x}_{0,0} \neq \mathbf{x}_{0,1}$，$\exists \mathbf{x}_{1,0}, \mathbf{x}_{1,1} \in B_{r_1}(\mathbf{x}_0) \cap A - \{\mathbf{x}_0\}, \mathbf{x}_{1,0} \neq \mathbf{x}_{1,1}$

3. 仿照 1 的論述分別作用於 $\mathbf{x}_{0,0}, \mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{x}_{1,0}, \mathbf{x}_{1,1}$，取 $r_2 < \min\{\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}|\mathbf{x}_{0,0} - \mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{x}_{1,0} - \mathbf{x}_{1,1}|\}$ 得 4 個互不相交的球體，每個球體都含 A 中相異兩點，分別為
$$\mathbf{x}_{0,0,0},\ \mathbf{x}_{0,0,1},\ \mathbf{x}_{0,1,0},\ \mathbf{x}_{0,1,1},\ \mathbf{x}_{1,0,0},\ \mathbf{x}_{1,0,1},\ \mathbf{x}_{1,1,0},\ \mathbf{x}_{1,1,1}, \tag{4}$$
他們和球心上一代選出的點的距離 $< \frac{1}{2^2}$

4. 依此類推，以致無窮，得樹形點列圖示如下：
第 $n+1$ 代點列與第 n 代之間的距離 $< \frac{1}{2^n}$

5. 想像你在玩賓果遊戲，每個 $\mathbf{x}_{\dots}$ 點都是分岔點，彈珠由 $\mathbf{a}$ 點放入，kit kit kok kok（音），彈珠選出了一條通往極限的道路。由於 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$，彈珠選出的點列為一 Cauchy Sequence

6. 此 Cauchy Sequence 收斂到一點，此點可對應到 $[0,1]$ 間實數二進位表示的相應點，此對應為 1-1，故 A 為不可數。而 $A \subset \mathbb{R}^n \therefore \#A = c$（實數的基數）□

5.4 $\mathbb{R}^n$ 中的 compact sets

定義 4.1

$A \subset \mathbb{R}^n$，$\mathcal{F}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的一族開集（Family of open sets），我們稱 A 被 $\mathcal{F}$ 覆蓋（cover）若

$\forall x \in A\ \exists V \in \mathcal{F}$ 使 $x \in V$。

$\mathcal{F}$ 稱為 A 上的一個開覆蓋族（open covering）

定義 4.2

我們稱 A 為 compact，若對任意 A 上的 open covering 恆存在有窮個 subcovering 蓋住 A。
即：$\exists \{V_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ 使 $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$

例 1: $\mathbb{N}$ 表自然數集

$$I_k = (k - \frac{1}{2^k}, k + \frac{1}{2^k}), k = 1, 2, \cdots$$

為 $\mathbb{N}$ 上的一個 open covering，但不存在 finite subcovering，$\therefore \mathbb{N}$ 非 compact。

例 2: $A = (0, 1)$

$$\mathcal{F} = \{(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}) | k = 1, 2, \cdots\}$$

則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一個 open covering，但不存在 finite subcovering $\therefore A$ 非 compact。

例 3: 空集合 $\emptyset$ 為 compact。
$\mathbb{R}^n$ 本身非 compact。

例 4: $[a, b]$ 為 compact，這是 Heine-Borel 定理的內容。

例 5: $A = \{\frac{1}{k} | k \in \mathbb{N}\}$ 非 compact。
令

$$I_k = (\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{k} + \frac{1}{2^k}), \qquad \mathcal{F} = \{I_k | k \in \mathbb{N}\}$$

則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一個 open covering，但不存在 finite subcovering

例 5: 承上例，$B = A \cup \{0\}$ 為 compact。
設 $\mathcal{F}$ 為 B 上的一個 open covering
$0 \in B \Rightarrow \exists V \in V$ 使 $0 \in V$
V open $\Rightarrow \exists I_\delta(0) = (-\delta, \delta) \subset V$
對此 δ $\exists N$ 使 $\frac{1}{k} < \delta$ 當 $k > N$
即 $\frac{1}{k} \in I_\delta(0) \subset V$ 當 $k > N$
B 中其餘不被 V 所覆蓋的點了不起只剩 $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{N}$，每一點又都可被 $\mathcal{F}$ 中一個 open set 所覆蓋，因此這些 open sets 加上 V 就蓋住了 B，故 B 為 compact。

微 compact，近代數學其當機矣！
compact 是這麼重要，如何判斷一集合是否為 compact？
依定義，每次要從給定的 open covering 找 finite subcovering，似乎不是一件很輕鬆的事，有沒有直接了當的辦法可以輕鬆判定？
有！在 $\mathbb{R}^n$ 中，

$$\text{Compact} = \text{Bounded} + \text{Closed}.$$

這是這一章要介紹的核心內容。

依這個定理，我們可以判定：$\mathbb{R}^n$ 中的閉球為 compact，Cantor set 為 compact，閉輪胎體為 compact，$[0,1]$ 中的有理點集非 compact 因其非 closed，$B_r(\mathbf{x})$ 非 compact 因其非 closed，

$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\}$ 為 compact，因其為 bounded and closed

$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2-z^2=1\}$ 非 compact，因其非 bounded（雙曲面）

定理5.4.1 compact $\Rightarrow$ bounded and closed

証：

(a) bounded

設 $A \subset \mathbb{R}^n$ 為 compact，考慮

$$\mathcal{F} = \{B_1(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in A\}$$

則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一個 open covering，故存在 finit subcovering $\{B_1(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^k$ 蓋住了 A

令 $R = 1 + \max_{1 \leq \leq k}\{\|\mathbf{x}_i\|\}$

則 $A \subset B_R(\mathbf{0})$，故 A 為有界集。$\Box$

(b) closed

A 如上，欲証 A^c 為 open

給定 $\mathbf{y} \in A^c$ 考慮

$$\mathcal{F} = \{B_{\frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A\}$$

則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一個 open covering，

A 為 compact $\Rightarrow \exists$finite subcovering $\{B_{r_i}(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^k$ 蓋住了 A，其中 $r_i \equiv \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\|$

取 $\delta = \min_{1 \leq i \leq k}\{r_i\}$

則 $B_\delta(\mathbf{y}) \cap B_{r_i}(\mathbf{x}_i) = \emptyset \ \forall i = 1, 2, \cdots, k$

$\Rightarrow B_\delta(\mathbf{y}) \cap A = \emptyset$

$\therefore B_\delta(\mathbf{y}) \subset A^c$

即 A^c 為 open，$\therefore A$ 為 closed。$\Box$

定理 5.4.2 bounded and closed $\Rightarrow$ compact

在証明這個定理之前，我們先敘述一下 $\mathbb{R}^n$ 中的方塊套定理。

定理 5.4.3（$\mathbb{R}^n$ 中的方塊套定理）

設 $Q_k = [a_{1,k}, b_{1,k}] \times [a_{2,k}, b_{2,k}] \times \cdots \times [a_{n,k}, b_{n,k}]$

表 $\mathbb{R}^n$ 中的方塊，滿足：

(a) $Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$

(b) $\lim_{k\to\infty} |b_{j,k} - a_{j,k}| = 0 \ \forall j = 1, 2, \cdots, n$

則唯一存在 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 使 $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k = \{\mathbf{x}_0\}$。

此定理即為 $\mathbb{R}$ 中區間套定理的推廣，顯而易見，在此不浪費筆墨。

證： 為了簡明，不失一般性，已下我且以 $\mathbb{R}^2$ 為例論證之。
此定理的論述其實就是 $\mathbb{R}$ 中 Heine-Borel 定理的翻版。
設 $A \subset \mathbb{R}^2$ 為一有界閉集，$\mathcal{F}$ 為其上一個 open covering，
若不存在 finite subcovering，我們想利用方塊套定理逼出矛盾來，一如 $\mathbb{R}$ 中論述。
A 為有界集，設 $A \subset [a,b] \times [c,d]$
令 $Q_0 = [a,b] \times [c,d]$

(a) 把 Q_0 分成四等份，令其為 $\{I_j\}_{j=1}^4$，I_j 為閉方塊 $\forall j = 1,2,3,4$
則 $A \cap I_j, j = 1,2,3,4$ 至少有一塊不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮開集蓋住，設此塊為 $A \cap Q_1$，
$Q_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$
$|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b-a|$ $|d_1 - c_1| = \frac{1}{2}|d-c|$
任取 $\mathbf{x}_1 \in A \cap Q_1$

(b) 重複第一步的操作於 Q_1，得方塊 $Q_2 = [a_2, b_2] \times [c_2, d_2]$
$|b_2 - a_2| = \frac{1}{2}|b_1 - a_1| = \frac{1}{2^2}|b-a|$
$|d_2 - c_2| = \frac{1}{2}|d_1 - c_1| = \frac{1}{2^2}|d-c|$
$A \cap Q_2$ 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮集蓋住
任取 $\mathbf{x}_2 \in A \cap Q_2$
依此類推以致無窮，得方塊套 $\{Q_k\}$
$Q_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$
$|b_k - a_k| = \frac{1}{2^k}|b-a| \to 0$，$|d_k - c_k| = \frac{1}{2^k}|d-c| \to 0$ 當 $k \to \infty$
$Q_k \cap A$ 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮開集蓋住
任取 $\mathbf{x}_k \in A \cap Q_k$

(c) 依方塊套定理，$\exists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ 使 $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k = \{\mathbf{x}_0\}$
而 $\mathbf{x}_k \in Q_k \cap A$ $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ 且 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \{\mathbf{x}_0\}$
A 為 closed $\Rightarrow \mathbf{x}_0 \in A$

(d) $\mathcal{F}$ 蓋住了 A $\mathbf{x}_0 \in A \Rightarrow \exists V \in \mathcal{F}$ 使 $\mathbf{x}_0 \in V$
V open $\Rightarrow \exists r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}_0) \subset V$
而 Q_k 縮成一點 $\mathbf{x}_0$ 故 $Q_k \subset B_r(\mathbf{x}_0)$ 當 k 夠大 $\Rightarrow Q_k \cap A \subset B_r(\mathbf{x}_0) \subset V$
僅僅一個 V 就蓋住了 $Q_k \cap A$，這和 $Q_k \cap A$ 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮個開集蓋住的事實矛盾。$\square$

Remark

上述定理的証明過程中

compact $\Rightarrow$ bounded and closed

純為 topology 的論述，與 $\mathbb{R}^n$ 的特性無關。

bounded and closed $\Rightarrow$ compact

則用到了方塊套定理，即實數的完備性，此為 $\mathbb{R}^n$ 中所特有，在一般賦距空間（metric space）中不再成立，請同學留意。

bounded and closed 有什麼好？

根據 Bolzano-Weierstrass 定理，bounded 保証 A 中任意 sequence 都有 convergent subsequence converge 到 $\mathbb{R}^n$ 中某點 $\mathbf{x}_0$

A 為 closed，此點 $\mathbf{x}_0$ 當然要在 A 裡面

這就是 sequentially compact

5.5 Sequentiall compact set

<u>定義</u>

$A \subset \mathbb{R}^n$ 稱為 sequentially compact 若 $\forall \{\mathbf{x}_n\} \subset A$ $\exists \{\mathbf{x}_{n_k}\}$ 使得

$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_{n_k} = \mathbf{x}_0 \in A$

簡言之，任意 A 中的點列恆存在收斂子點列。

當然，收斂不是指在 $\mathbb{R}^n$ 中收斂，而是指收斂到 A 中某點，這是 aequentially compact 的要點。

Sequentially compact 在處理許多數學問題上十分管用，尤其在函數空間上，透過它來處理許多偏微分方程式解的存在問題，不在話下。

例 1: $(0,1)$ 非 sequentially compact
取 $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \notin (0,1)$
$\therefore (0,1)$ 非 sequentially compact

例 2: $\emptyset$ 為 sequentially compact
$\mathbb{R}$ 非 sequentially compact（取 $x_n = n$, $\{x_n\}$ 無收斂子點列）

例 3: $[0,1]$ 為 sequentially compact，理由如前（Bolzano-Weierstrass 定理）。

有沒有好辦法可以輕易判斷一集合是否為 sequentially compact？

有，在 $\mathbb{R}^n$ 中

$$\text{sequentially compact} \;=\; \text{bounded} \;+\; \text{closed}$$

<u>定理 5.5.1</u>

$A \subset \mathbb{R}^n$ 則

A 為 sequentially compact $\Leftrightarrow$ A 為 bounded and closed。

証：

($\Rightarrow$)

(a) bounded

若 A 非 bounded，任取 $\mathbf{x}_0 \in A$ $\forall n$ $\exists \mathbf{x}_n \in A$ 使 $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| > n$

$\{\mathbf{x}_n\} \subset A$，$A$ 為 sequentially compact

$\Rightarrow \{\mathbf{x}_n\}$ 有收斂子點列 $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$，收斂到 A 中某點 $\mathbf{y}_0$

對 $\epsilon = 1$ $\exists N$ 使 $|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{y}_0| < 1$ 當 $k > N$

則 $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| \geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{n_k}| - |\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{y}_0| > n_k - 1 \to \infty$ 當 $k \to \infty$

兩個給定點的距離 $\to \infty$！矛盾。

(b) closed

設 $\mathbf{x}_0$ 為 A 的 accumulation point

則存在 A 中相異點列 $\{\mathbf{x}_n\}$，$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ 當 $n \to \infty$

A 為 sequentially compact $\Rightarrow \mathbf{x}_0 \in A$

$\therefore A$ 為 closed。

($\Leftarrow$) 如前述（compact 概念的由來）$\square$

<u>Remark</u>

(a) 上述定理的論證過程中

sequentially compact $\Rightarrow$ bounded and closed

純為 topology 的論述，與 $\mathbb{R}^n$ 的特性無關

bounded and closed $\Rightarrow$ sequentially compact 則用到 Bolzano-Weierstrass 定理，此定理由區間套定理而來，背後就是實數的完備性，此為 $\mathbb{R}^n$ 中特有，在一般賦距空間（metric space）中不再成立，同學請留意。

(b) 透過 bounded and closed 作媒，我們有：在 $\mathbb{R}^n$ 中

$$\text{compact} \; = \; \text{bounded} \; + \; \text{closed} \; = \text{sequentially compact}$$

其論述依據圖示如下：

在一般賦距空間中，已不在有實數的完備性。中間那個 bounded and closed 已無能為介，compact 和 sequentially compact 關係如何？這是下一章要講的核心。事實上，在 metric space 中

$$\text{compact} \; = \text{sequentially compact}$$

橋不見了，它們如何暗度陳倉？且待下回分解。

第五章完

頁碼	作品	版權標示	來源／作者
1	微管仲…左衽矣		《論語・憲問》，孔丘
1	飲余馬於咸池… 聊逍遙以相羊		《楚辭・離騷》，屈原