Chapter 4

極限、連續與督脈的貫通

4.1 極限（Limit）

微積分誕生於 1670 年代，不論微分或積分，都牽涉到極限。就以微分來說，一開始就碰到導數：

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

當時的數學家憑直覺做數學，邏輯上無法把極限講清楚，受到很大的批評。

極限有那麼大的困難嗎？為什麼講不清楚？

先來看一個最簡單的例子：

$$\lim_{x \to 2} x^2$$

大家都知道答案是 4，因為 x 很接近 2 時 x^2 很接近 4，很多同學就直接把 $x = 2$ 代入 x^2 中得到 4。這樣做並沒問題，因為 x^2 在 2 這一點是連續的。

再來看一個稍微複雜的例子:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

利用計算機可以得到以下數值：

x	$\frac{\sin x}{x}$
1	0.84147...
0.5	0.95885...
0.1	0.99833...
0.05	0.9995833...
0.01	0.9998333...
0.005	0.9999583...
0.0001	0.9999999...

從上表中可以見到當 x 很接近 0 時，$\frac{\sin x}{x}$ 會很接近 1。

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ 是什麼意思呢？
當然是「x 很接近 a 的時候，$f(x)$ 會隨著接近 l」。
x 接近 a 是主，$f(x)$ 接近 l 是從，主人靠近 a，從僕不敢不靠近 l。
直覺上如此，但邏輯上說不清楚。一直到 1820 年代 Bolzano,Cauchy 等人提出新的觀點，而有「$\epsilon - \delta$」語言的出現，把主從反過來看，1860 年 Weierstrass 才嚴格地用今日的「$\epsilon - \delta$」語言來處理極限問題。
至此，微積分才算建立起無瑕的邏輯基礎。
<u>定義 4.1</u> 設 $f(x)$ 為定義在 a 點附近的實函數，我們說

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

若給定任意正數 $\epsilon > 0$，恆可找到 $\delta > 0$ 使

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad \text{當} 0 < |x - a| < \delta$$

注意這邊的 δ 隨 ϵ 而變。不同的 ϵ 所需的 δ 不同。
從上面的定義可看出 Weierstrass 對「$\lim_{x\to a} f(x) = l$」的描述為
「$f(x)$ 可以任意地接近 l，只要 x 夠接近 a」
即「$|f(x) - l|$ 可以任意地小，只要 $|x - a|$ 夠小」，此即定義 4.1。
要把極限講清楚，主從必須顛倒，$f(x) - l$ 是我們的公主，$x - a$ 是僕人，公主想休息（$|f(x) - l| < \epsilon$），僕人必須把床鋪好（找出 δ 來）。
這個彎，轉了將近 200 年。
$\epsilon - \delta$ 語言是現代數學分析必備的工具，是基本功。拳要打的好，馬步要立得穩，希望同學在進入近代分析學之前務必要把這馬步給蹲好。
例 1：試就 $\epsilon - \delta$ 語言，證明 $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$。

解 1: （看圖說故事）

如圖4.1，給定 $\epsilon > 0$，水平線 $y = 4 - \epsilon$，$y = 4 + \epsilon$ 與拋物線分別相交於 $P_1(x_1, 4 - \epsilon)$ 及 $P_2(x_2, 4 + \epsilon)$ 兩點，$x_1 = \sqrt{4 - \epsilon}, x_2 = \sqrt{4 + \epsilon}$
令 $\delta = \min\{x_2 - 2, 2 - x_1\} = x_2 - 2$
則當 $|x - 2| < \delta, x \neq 2 \;\Rightarrow\; x \in (x_1, x_2)$，有

$$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$

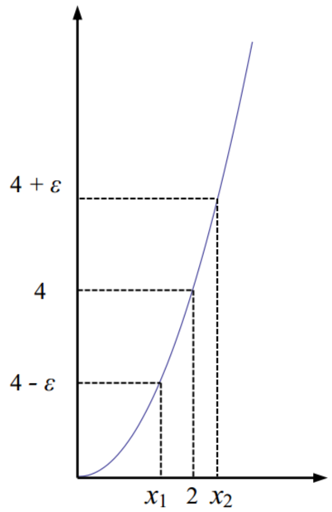
即 $|x^2 - 4| < \epsilon$ 當 $0 < |x - 2| < \delta$
$\therefore \lim_{x\to 2} x^2 = 4$ □

解 2: （利用不等式）

1. 要求 $\lim_{x\to 2} x^2$，我們只要考慮當 x 靠近 2 時，x^2 的行為。為了以下不等式的估計，不妨把 x 限制在 2 附近: $|x - 2| < 1$，即

$$x \in (1, 3) \tag{1}$$

Figure 4.1:



2. 由
$$|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2| \tag{2}$$

3. 給定 $\epsilon > 0$，欲找 $\delta > 0$ 使 $|x^2-4| < \epsilon$ 當 $0 < |x-2| < \delta$
   根據 2，只要 $5|x-2| < \epsilon$ 則 $|x^2-4| < \epsilon$
   即 $|x^2-4| < \epsilon$ 只要
$$|x-2| < \frac{\epsilon}{5} \tag{3}$$

4. 啊哈！給定 $\epsilon > 0$，只要取 $\delta = \epsilon/5$ 就可以滿足所需了
   同學不要高興太早，(3) 式之所以成立是因為有 (1) 式，飲水要思源。例如 $\epsilon = 10$，這邊所取的 $\delta = \epsilon/5 = 2$，已經超越了 (1) 中的範圍，此時 (3) 不再成立！

5. 怎麼辦？吃果子拜樹頭，從 (1) 出發
   取 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$
   $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow$ (1) 式成立 $\Rightarrow$ (3) 式的估計成立，一切稱心如意，可以「啊哈」了。

Remark

1. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ 中，所考慮的是 x 在 a 點附近的行為，$x \neq a$，因此 $\epsilon - \delta$ 語言中 $0 < |x-a| < \delta$ 左邊的 $0 < |x-a|$ 不可以省略。
   例如：
$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array}$$
   $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$。對 $\epsilon = 1/2$，$\exists\delta$ 使
$$|f(x)-1| < \frac{1}{2}, \qquad \text{當} 0 < |x-1| < \delta$$
   $x = 0$ 這一點必須排除，否則 $|f(0)-1| = 1 \not< \frac{1}{2}$！

2. 例 1 中解 1 利用圖形來找 δ，看起來似乎簡單清晰，但不同函數不同圖形，並無規則可循，對稍微複雜的函數要畫出它的圖形並不是那麼容易。
   解 2 利用不等式的估計來找 δ，不用畫圖，是處理 ϵ-δ 問題的正道。

例 2：利用 $\epsilon-\delta$ 語言證明 $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$
解：

1. 先天設定 $|x-1|<1$，即
$$0<x<2 \tag{4}$$

2. 由
$$|\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}|=\frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}<\frac{(x-1)^2}{2} \tag{5}$$

3. (5) 式與 (4) 無關，先天設定乃多餘

4. 根據 (5)，若 $\frac{(x-1)^2}{2}<\epsilon$ 則 $|\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}|<\epsilon$
   因此給定 $\epsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{2\epsilon}$ 即為所求。

例 3：利用 $\epsilon-\delta$ 語言證明 $\lim_{x\to 3}\frac{x}{\sqrt{x^2-x-5}}=3$
分析：

1. $x^2-x-5=0$，有正根 $x\approx 2.7913$
   考慮先天設定：$|x-3|<\frac{1}{10}$，即 $2.9<x<3.1$，以避開此根

2.
$$|\frac{x}{\sqrt{x^2-x-5}}-3|=|\frac{x-3\sqrt{x^2-x-5}}{\sqrt{x^2-x-5}}|=|\frac{x^2-9(x^2-x-5)}{\sqrt{x^2-x-5}\cdot(x+3\sqrt{x^2-x-5})}|$$
   分子：$|8x^2-9x-45|=|(x-3)(8x+15)|<|x-3|(8\cdot 3.1+15)=39.8|x-3|<40|x-3|$
   分母：$\sqrt{x^2-x-5}(x+3\sqrt{x^2-x-5})>3(x^2-x-5)>x^2-x-5>(2.9)^2-(2.9)-5=0.51>0.5$
   故
$$|\frac{x}{\sqrt{x^2-x-5}}-3|<80|x-3|<\epsilon \qquad \text{當}|x-3|>\frac{\epsilon}{80}$$

3. 給定 $\epsilon>0$，取 $\delta=\min\{\frac{1}{10},\frac{\epsilon}{80}\}$，則有
$$0<|x-3|<\delta\Rightarrow \text{先天設定成立}\Rightarrow \text{分子, 分母估計成立}\Rightarrow |\frac{x}{\sqrt{x^2-x-5}}-3|<80|x-3|<\epsilon$$

定義 4.2

(a) $\lim_{x\to\infty}f(x)=l$ 若且唯若 $\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$ 使
$$|f(x)-l|<\epsilon \quad \text{當}x>N$$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ 若且唯若 $\forall\epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$ 使

$$|a_n - l| < \epsilon \quad 當 n > N$$

例 4：利用 $\epsilon - N$ 語言證明 $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x-1}} = 1$
分析：

1. 給定 $\epsilon > 0$ 欲求 N 使
$$\left|\frac{x}{x^2-x-1} - 1\right| < \epsilon \quad 當 n > N$$

2. 由
$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-x-1}} - 1\right| = \left|\frac{x-\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{x^2-x-1}}\right| = \left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-1}(x+\sqrt{x^2-x-1})}\right|$$
分子：
$$|x+1| < 2x \quad 當 x > 1 \tag{6}$$
分母：
$$x^2 - x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + (\frac{1}{2}x^2 - x - 1) > \frac{1}{2}x^2 \quad 當 x > 3 \tag{7}$$
$\therefore \sqrt{x^2-x-1}(x+\sqrt{x^2-x-1}) > \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot (x + \frac{x}{\sqrt{2}}) > \frac{x^2}{\sqrt{2}}$
故
$$\left|\frac{x}{x^2-x-1} - 1\right| < \frac{2\sqrt{2}}{x} < \frac{3}{x} < \epsilon \quad 當 x > \frac{3}{\epsilon} \tag{8}$$

3. 取 $N > \max\{1, 3, \frac{3}{\epsilon}\}$ 則當 $x > N \Rightarrow$ (6)(7) 估計成立，(8) 成立。

例 5：利用 $\epsilon - N$ 語言證明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a > 0$
分析：

1. 當 $n > a$。
$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &= \frac{a\cdot a\cdots\cdot a}{1\cdot 2\cdots\cdot [a]} \cdot \frac{a\cdot a\cdots\cdot a}{([a]+1)\cdot([a]+2)\cdots\cdot n} \\ &\le K\cdot\frac{a}{n}, \qquad K = \frac{a\cdot a\cdots\cdot a}{1\cdot 2\cdots\cdot [a]} \\ &< \epsilon \qquad 當 n > K\cdot\frac{a}{\epsilon}\end{aligned}$$

2. 給定 $\epsilon > 0$，取 $N = [K\cdot\frac{a}{\epsilon}] + 1$，則
$$n > N \Rightarrow n > K\cdot\frac{a}{\epsilon} \Rightarrow \left|\frac{a^n}{n!}\right| < \epsilon$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

4.2 Cauchy 準則（Cauchy's Criterion）

對數列 $\{a_n\}$ 若 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在且等於 l，依定義:

$\forall\epsilon > 0 \qquad \exists N$ 使得

$$|a_n - l| < \epsilon \qquad 當 n > N$$

給定數列 $\{a_n\}$ 要判斷它收斂，依定義你必須知道 l，但很多情況 l 未必容易求得！

有沒有一套準則，直接觀察 $\{a_n\}$ 的行為，即可判斷它是否收斂？

Cauchy 給出了一個判斷數列 $\{a_n\}$ 收不收斂的準則：

Cauchy's Criterion

稱數列 $\{a_n\}$ 滿足 Cauchy's Criterion 若且唯若

$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$使

$$|a_m - a_n| < \epsilon \qquad 當 m, n > N$$

或

$$|a_{n+k} - a_n| < \epsilon \qquad 當 n > N, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

<u>定義 4.3</u> 稱 $\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence 若其滿足 Cauchy's criterion

<u>定理 4.5</u> $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence

證：

($\Rightarrow$) 設 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

給定 $\epsilon > 0$ $\exists N$ 使

$$|a_n - l| < \epsilon/2 \qquad 當 n > N$$

於是

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - l| + |a_n - l| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \qquad 當 m, n > N$$

($\Leftarrow$)

1. Claim: $\{a_n\}$ 有界。

   對 $\epsilon = 1$，$\exists N$ 使

$$|a_m - a_n| < 1 \qquad 當 m, n > N$$
$$\Rightarrow |a_m - a_{N+1}| < 1 \qquad \forall m > N$$
$$\Rightarrow |a_m| < 1 + |a_{N+1}| \qquad 當 m > N$$

   取 $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\}$，則有 $|a_n| \leq M \quad \forall n$

2. 依 Bolzano-Weierstrass 定理，$\{a_n\}$ 有收斂子序列，設為 $\{a_{n_k}\}$，$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$

3. Claim: $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

理由：

$\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence，給定 $\epsilon > 0$，$\exists N_1$ 使

$$|a_m - a_n| < \epsilon/2 \qquad 當 m,n > N_1$$

又 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$，對此 ϵ，$\exists N_2$ 使

$$|a_{n_k} - l| < \epsilon/2 \qquad 當 k > N_2$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 並選定 $k > N$，則有

$$|a_n - l| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \qquad 當 n > N$$

Remark 從上面的證明可看出

(a) 「$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在」$\Rightarrow$ 「$\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence」純為極限的論述，與實數的完備性無關

(b) 「$\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence」$\Rightarrow$ 「$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在」此推論需要 Bolzano-Weiestrass 定理，其背後就是實數的完備性。

因此「Cauchy sequence 等價於收斂數列」只有在 $\mathbb{R}^n$ 中成立，但對一般的 metric space 不一定成立，在此請同學留意，我們將於第六章詳談之。

例 1：$\{x_n\} \subset \mathbb{R}$，$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$ $\forall n$。試證：$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

分析：

$|x_{n+k} - x_n| \le \sum_{j=n}^{n+k-1} |x_{j+1} - x_j| < \sum_{j>n} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n}$

給定 $\epsilon > 0$ 取 N 使 $\frac{1}{2^N} < \epsilon$，則

$$|x_{n+k} - x_n| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \epsilon \qquad \forall n > N, \forall k \in \mathbb{N}$$

$\therefore \{x_n\}$ 為 Cauchy sequence，故 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在。

於 $\mathbb{R}^n$ 中，我們稱 $\{\mathbf{x}_n\}$ 為 Cauchy sequence 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N$ 使

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \epsilon \qquad 當 m,n > N$$

或

$$\|\mathbf{x}_{n+k} - \mathbf{x}_n\| < \epsilon \qquad 當 n > N, \forall k \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{R}^n$ 中有 Bolzano-Weiestrass 定理，故定理 4.5 的論述成立，另陳述為定理於下

定理 4.6 設 $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$，則 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\{\mathbf{x}_n\}$ 為 Cauchy sequence

例 2：$\{\mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$，$\|\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_m\| < \alpha_m$，$\sum \alpha_m < \infty$，則 $\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m$ 存在

分析：

$\sum \alpha_m < \infty$，給定 $\epsilon > 0$，$\exists N$ 使 $\sum_{m>N} \alpha_m < \epsilon$

據此，當 $m > N$ 有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_{m+k} - \mathbf{x}_m\| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \|\mathbf{x}_{m+k-j} - \mathbf{x}_{m+k-j-1}\| \\ &\leq \sum_{i=m}^{m+k-1} \alpha_i < \sum_{i>N} \alpha_i < \epsilon\end{aligned}$$

$\therefore \{\mathbf{x}_m\}$ 為 Cauchy sequence，依定理 4.6 知其極限存在。

例 3：$\{x_n\} \subset \mathbb{R}$，$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{n} \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在說明：

雖然 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，但 $\sum \frac{1}{n} = \infty$，無法保證 $\{x_n\}$ 為 Cauchy sequence。

例如：$x_n = \ln n$，則

$$|x_{n+1} - x_n| = |\ln \frac{n+1}{n}| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

（注意 $\ln(1+x) < x, \forall x > -1$）

但 $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$！

例 4：$a_n \geq a_{n+1} > 0\ \forall n$，$\sum a_n < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n a_n = 0$

分析：

1. 令 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$，依定義 $\sum a_n < \infty$，即 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在。

   依 Cauchy's criterion，有：

   $\forall \epsilon > 0, \exists N_1$ 使

   $$|S_{n+k} - S_n| < \epsilon/2, \qquad \forall n > N_1, k \in \mathbb{N}$$

   即

   $$|\sum_{j=1}^{k} a_{n+j}| < \epsilon/2, \quad \forall n > N_1, k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

2. $a_n \searrow$，(9) $\Rightarrow k a_{n+k} < \epsilon/2$ 當 $n > N_1, \forall k$

3. 選定 $n > N_1$，有

   $$(n+k) a_{n+k} = n a_{n+k} + k a_{n+k} < n a_{n+k} + \epsilon/2 \tag{10}$$

4. 又 $\sum a_n < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

   對此 ϵ $\exists N_2$ 使

   $$a_{n+k} < \frac{\epsilon}{2n} \qquad \text{當} k > N_2 \tag{11}$$

5. 取 $N = n + N_2$ ，則有

   $m > N \Rightarrow m = n + k,\ k > N_2$ 因此

   $$0 < m a_m = (n+k) a_{n+k} = n a_{n+k} + k a_{n+k} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

   故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Remark

上例中，$a_n \geq a_{n+1}\ \forall n$ 是論述成立的必要條件，無此假設，結論未必成立，至於有什麼反例就留給同學們當習題。

4.3 極限的幾個基本定理

定理 4.1 夾擠定理

(a) f, g 定義在 $(a-\rho, a+\rho)$ 上，$\rho > 0$，滿足

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in (a-\rho, a+\rho)$$

若 $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$，則 $\lim_{x\to a} f(x) = l$

(b) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 當 $x > a,\ \ a \in \mathbb{R}$
若 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = l$，則 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$

(c) $b_n \leq a_n \leq c_n$ 當 $n > K,\ \ K \in \mathbb{N}$
若 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$，則 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

證明：

(a) 由 $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$，給定 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_1, \delta_2 < \rho$ 使

$$|g(x) - l| < \epsilon \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_1$$
$$（或\ l-\epsilon < g(x) < l+\epsilon\ 當\ 0 < |x-a| < \delta_1）$$
$$|h(x) - l| < \epsilon \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_2$$
$$（或\ l-\epsilon < h(x) < l+\epsilon\ 當\ 0 < |x-a| < \delta_2）$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，則有 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$

$$l-\epsilon < g(x) < f(x) < h(x) < l+\epsilon$$

即

$$|f(x) - l| < \epsilon \qquad 當 0 < |x-a| < \delta$$

(b) 由 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = l$，給定 $\epsilon > 0$，$\exists N_1, N_2 > a$ 使

$$|g(x) - l| < \epsilon \qquad 當 x > N_1$$
$$（或\ l-\epsilon < g(x) < l+\epsilon\ 當\ x > N_1）$$
$$|h(x) - l| < \epsilon \qquad 當 x > N_2$$
$$（或\ l-\epsilon < h(x) < l+\epsilon\ 當\ x > N_2）$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，則有 $x>N \quad \Rightarrow$

$$l-\epsilon<g(x)<f(x)<h(x)<l+\epsilon$$

即

$$|f(x)-l|<\epsilon \qquad \text{當} x>N$$

(c) 同 (b)

例 1：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
分析：

1. $\sqrt[n]{n}>1 \quad \forall n$
   令 $\sqrt[n]{n}=1+\epsilon_n$, $\epsilon_n>0$
   欲證 $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n=0$

2. $n=(1+\epsilon_n)^n=1+n\epsilon_n+\frac{n(n-1)}{2!}\epsilon_n^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2!}\epsilon_n^2$
   於是有：
$$0<\epsilon_n^2<\frac{2}{n-1}$$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$，根據夾擠定理，$\lim_{n\to\infty}\epsilon_n^2=0$
   $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\epsilon_n=0$（請同學自行證明）

例 2：$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1$
分析：我們已知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow$strictly to e

$$\therefore 1\leq\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n}\leq e^{1/n}$$

$\lim_{n\to\infty}e^{1/n}=1$，根據夾擠定理，知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1$$

例 3：$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$
分析：$0\leq|x\sin\frac{1}{x}|\leq|x|\ \forall x\neq 0$
$\lim_{x\to 0}|x|=0$，根據夾擠定理知

$$\lim_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}|=0$$

$\therefore \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$
例 4：

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$

(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$

分析：

(a) $\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} > n$
$\lim_{n\to\infty} n = \infty \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$

(b)
1. 已知 $x+y=m, m \in \mathbb{N}$，則當 x 從 1 增加到 $m/2$ 時 $xy \nearrow$ strictly in x
2. $n! = 1 \cdot \underbrace{2 \cdots (n-1)} \cdot n$
$n! = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdots 2} \cdot 1$
$(n!)^2 = n^2 \cdot \prod_{k=2}^{n-1} k(n-k+1) > n^2(2(n-1))^{n-2}$（由 1.）
3. 故
$$0 < \frac{n^n}{(n!)^2} < \frac{n^{n-2}}{[2(n-1)]^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = 0$$
$\therefore \lim_{n\to\infty}$ 右 $= 0$
依夾擠定理知 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

<u>定理 4.2</u> 設 $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$，則

(a) $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = l_1 + l_2$

(b) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = l_1 l_2$

(c) $\lim_{x\to a} [f(x)/g(x)] = l_1/l_2,\ l_2 \neq 0$

在證明定理 4.2 前，我先引述下列引理
<u>引理 4.1</u> $\lim_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow \exists a$ 的某鄰域 $(a-\delta, a+\delta)$ 使 f 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 上有界。
分析：對 $\epsilon = 1$，$\exists \delta$ 使
$$|f(x) - l| < 1 \quad \text{當} 0 < |x-a| < \delta$$
$\Rightarrow |f(x)| < |l| + 1$ 當 $0 < |x-a| < \delta$
取 $M = \max\{|f(a)|, |l|+1\}$ 則
$$|f(x)| < M \qquad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

定理 4.2 的證明：

(a) $|\,(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)\,| \leq |f(x)-l_1| + |g(x)-l_2|$
據 $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ 及 $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$，給定 $\epsilon > 0$，$\exists \delta_1, \delta_2$ 使
$$|f(x) - l_1| < \epsilon/2 \qquad \text{當} 0 < |x-a| < \delta_1 \tag{12}$$
$$|g(x) - l_2| < \epsilon/2 \qquad \text{當} 0 < |x-a| < \delta_2 \tag{13}$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，則 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$ (12)(13) 成立，即

$$|\,(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)\,| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

(b)

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - l_1l_2| \le& |f(x)g(x) - l_1g(x)| + |l_1g(x) - l_1l_2| \\ =& |g(x)||f(x)-l_1| + |l_1||g(x)-l_2| \end{aligned} \tag{14}$$

依 lemma 4.1，

$$\exists \delta_g, M \quad 使 \quad |g(x)| < M 當 |x-a| < \delta_g \tag{15}$$

又 $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$，$\lim_{x\to a} g(x) = l_2$，給定 $\epsilon > 0$，存在 δ_1, δ_2 使

$$|f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2M} \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_1 \tag{16}$$

$$|g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2|l_1|} \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_2 \tag{17}$$

取 $\delta = \min\{\delta_g, \delta_1, \delta_2\}$，則當

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \text{(15)(16)(17) 成立}$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x) - l_1l_2| < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + |l_1| \cdot \frac{\epsilon}{2|l_1|} = \epsilon$$

(c) $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$
若能證明：

$$\lim_{x\to a} \phi(x) = l,\ l \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{\phi(x)} = \frac{1}{l} \tag{18}$$

則根據 (b)，$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} == \frac{l_1}{l_2}$
今證明 (18)

$$|\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{l}| = \frac{|\phi(x) - l|}{|l\phi(x)|} \tag{19}$$

(i) 控制分母使它離開 0
由 $\lim_{x\to a} \phi(x) = l$，$l \neq 0$，不妨設 $l > 0$
對 $\epsilon = \frac{l}{2}$, $\exists \delta_1$ 使

$$|\phi(x) - l| < \epsilon = \frac{l}{2} 當 \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \tag{20}$$

$$即 \ \frac{l}{2} < \phi(x) < \frac{3l}{2} \ 當 \ 0 < |x-a| < \delta_1 \tag{21}$$

代入 (19) 得

$$|\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{l}| < \frac{2}{l^2}|\phi(x) - l| \ 當 0 < |x-a| < \delta_1$$

(ii) $|\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{l}|$ 的估計

據 $\lim_{x\to a}\phi(x) = l$ 給定 $\epsilon > 0$ $\exists\delta_2$ 使

$$|\phi(x) - l| < \frac{l^2}{2}\epsilon \quad 當 \quad 0 < |x-a| < \delta_1$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 則當 $0 < |x-a| < \delta$

$$|\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{l}| < \frac{2}{l^2}\frac{l^2}{2}\epsilon = \epsilon \qquad \square$$

4.4 連續函數的幾個基本性質

4.4.1 連續

設 $I \subset \mathbb{R}$ 為定義在 I 上的實函數

$x_0 \in I$ 我們稱 F 在 x_0 連續若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

即 $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta = \delta(\epsilon)$ 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad 當 x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I, x \neq x_0$$

若 f 在 I 上每一點都連續我們稱 f 在 I 上連續。

特別當 $I = [a,b]$，$a < b$，稱 f 為 $[a,b]$ 上的連續函數

f 在 $[a,b]$ 上連續則 f 具有中間值定理，最大與最小值定理，我們已於第二章中談過。

這一節中我們將再提出連續函數一個非常重要的定理－均勻連續定理。這個定理一出，則積分的存在問題就迎刃而解了。

為了讓這些性值完整地呈現，我再次引述如下

定理 4.7 中間值定理

設 f 在 $[a,b]$ 上連續，$f(a)f(b) < 0$ 則存在 $x \in (a,b)$ 使 $f(c) = 0$

定理 4.8 最大最小值定理

設 f 在 $[a,b]$ 連續，則 f 在 [a,b] 上取最大最小值，即存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 使

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$$

系：f 在 [a,b] 上連續，設 M, m 分別表 f 在 [a,b] 上的最大最小值，則 $\forall y \in [m,M]$ 存在 $x \in [a,b]$ 使 $f(x) = y$

即連續函數不遺漏最大最小值之間的任何值。

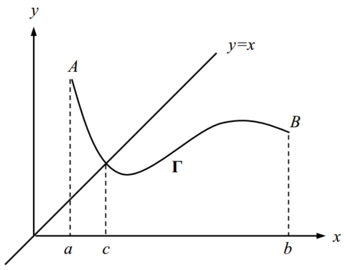
下面這個定理稱為固定點定理，可由中間值定理導出。

定理 4.9 固定點定理

設 f 在 $[a,b]$ 連續，且 f 把 $[a,b]$ 映入 $[a,b]$（即 $f([a,b]) \subset [a,b]$）則 $\exists c \in (a,b)$ 使 $f(c) = c$

分析：

Figure 4.2:



f 把 $[a, b]$ 映入自己，則 $a \le f(a)$，$f(b) \le b$

即點 $A(a, f(a))$ 在直線 $y = x$ 的上方

點 $B(b, f(b))$ 在直線 $y = x$ 的下方，如圖4.2

而 $\Gamma = \{(x, f(x)) | a \le x \le b\}$ 為平面上連接 A,B 的連續曲線

因此 Γ 必與直線 $y = x$ 相交，此交點即為固定點

直覺上這樣了解很好　不過我們還是利用中間值定理來證明它比較有說服力

定理的證明：

> 令 $g(x) = x - f(x)$
>
> 則 g 在 $[a, b]$ 連續 $g(a) > 0, g(b) < 0$
>
> 根據連續函數中間值定理，$\exists c \in (a, b)$ 使 $g(c) = 0$
>
> 即 $\exists c \in (a, b)$ 使 $f(c) = c$

Remark 定理 4.9 在 $\mathbb{R}^n$ 有相應的定理稱為 Brouwer fixed point theorem

設 $B \subset \mathbb{R}^n$ 為單位閉球，即 $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{x}\| \le 1\}$，$f$ 在 B 上連續並且把 B 映入 B

則 $\exists \mathbf{x}_0 \in B$ 使 $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$

想像你將海綿球向內壓縮，則海綿球內至少有一點不動，這就是 Brouwer fixed point theorem 的內容。

注意你不可以把海綿球換成輪胎。對於輪胎你以中心軸為轉軸，把他旋轉任意角，此寫像為連續，把輪胎映入輪胎，但沒有固定點。

下面這個性質純由極限的定義導出，和實數的完備性無關，因經常用到，特別把他標示為定理如下:

定理 4.19 正領域定理

設 f 在 x_0 附近有定義且連續

若 $f(x_0) > 0$ 則存在 $\delta > 0$ 使 $f(x) > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

證明：f 在 x_0 連續 $f(x_0) > 0$

對 $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ $\exists \delta$ 使

$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$ 當 $|x - x_0| < \delta$ (Remark)

即 $\frac{1}{2}f(x_0) < f(x) < \frac{3}{2}f(x_0)$ 當 $|x - x_0| < \delta$

$\therefore f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\square$

Remark

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ 的定義為

$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta$ 使

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad 當 0 < |x - x_0| < \delta \tag{22}$$

若 f 在 x_0 點連續，$l = f(x_0)$，因此

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad 對\ x = x_0\ 成立$$

故 (22) 可寫為

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad 當 |x - x_0| < \delta \tag{23}$$

4.4.2 均勻連續（uniform continuity）

$I \subset \mathbb{R}$, f 為定義於 I 上的連續函數

$x_0 \in I$, f 在 x_0 點連續，依極限定義: 給定 $\epsilon > 0\ \exists\delta$ 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad 當 |x - x_0| < \delta$$

注意：ϵ 給定，δ 與 x_0 有關，不同的 x_0 所需的 δ 各異，能否找到一個共同的 δ 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad 當 |x - x_0| < \delta, \quad \forall x_0 \in I \qquad ?$$

如果對任意 ϵ 都能找到這樣的 δ，我們稱 f 在 I 上均勻連續。

定義 4.4 $I \subset \mathbb{R}$, f 為定義於 I 上的連續函數

若對任意 $\epsilon > 0\ \exists\delta$ 只跟 ϵ 有關，使

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad 當 |x - y| < \delta, \quad \forall x, y \in I$$

我們稱 f 在 I 上均勻連續。

例： $f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad x$ 在 (0,1) 上是否均勻連續？

分析:

1. 固定 x，f 在 x 連續，對任意 $\epsilon > 0\ \exists\delta_x$ 使

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \epsilon \quad 當 0 < |x - y| < \delta, \quad \forall x, y \in I$$

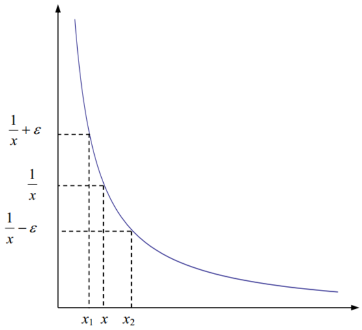
即：$\frac{1}{x} - \epsilon < \frac{1}{y} < \frac{1}{x} + \epsilon$ 當 $|x - y| < \delta_x$

如圖4.3：$\delta_x < x - x_1 = x - \frac{1}{\frac{1}{x}+\epsilon} = x - \frac{x}{1+\epsilon x} \to 0$ 當 $x \to 0$

因此找不到一共同的 $\delta > 0$ 使

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \epsilon \quad 當 0 < |x - y| < \delta, \quad \forall x, y \in (0,1)$$

Figure 4.3:



2. 邏輯上的論述：

   欲在邏輯上證明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非均勻連續

   即証：$\exists \epsilon > 0$ 使 $\forall \delta > 0$ $\exists x, y \in (0,1)$, $|x-y| < \delta$, 但 $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \geq \epsilon$

   就對 $\epsilon = 1$ 來看

   $\delta > 0$，不妨考慮 $\delta < 1$

   取 $x = \frac{\delta}{2}$, $y = \frac{\delta}{3}$, $x, y \in (0,1)$。且看：

   $|x-y| = \frac{\delta}{6} < \delta$ 但 $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{1}{\delta} > 1$

   $\therefore f(x) = \frac{1}{x}$ 在 (0,1) 非均勻連續

<u>定理 4.11</u> $I \subset \mathbb{R}$ $|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in I$ 則 f 在 I 上均勻連續

其中 I 滿足

$$x_1, x_2 \in I \Rightarrow [x_1, x_2] \subset I$$

證： $|f(x) - f(y)| = f'(z)|x-y| \leq M|x-y| \quad \forall x, y \in I$

給定 $\epsilon > 0$ 取 $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ 得證。$\square$

例 1: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a, \infty)$ 上均勻連續，$a > 0$

因 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $|f'(x)| < \frac{1}{a^2}$ $\forall x \in [a, \infty)$

例 2: $f(x) = \{ \begin{array}{cc} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array}$

$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}$ 當 $x \neq 0$, $|f'(x)| < 2$ 當 $|x| > 1$

又 $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上連續（請自行檢驗之）$\therefore$ 在 $[-1,1]$ 上有界，設 A 為其上界

取 $M = \max\{A, 2\}$ 則 $|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore f$ 在 $\mathbb{R}$ 上均勻連續

4.4.3 Heine-Borel 定理

<u>定義 4.4</u> 開覆蓋族（family of open covering）

設 $A \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{F}$ 為由 $\mathbb{R}$ 中某些開區間所成之集合

（$\mathcal{F}=\{I_\lambda|I_\lambda=(a_\lambda,b_\lambda),a_\lambda,b_\lambda\in\mathbb{R}\}$）

我們稱 A 被 $\mathcal{F}$ 覆蓋若

$\forall x\in A\ \exists I\in\mathcal{F}$ 使 $x\in I$

稱 $\mathcal{F}$ 為 A 上一族開覆蓋（open covering）

例 1: $\mathcal{F}=\{(\frac{1}{n},2)|n\in\mathbb{N}\}$

$\mathcal{F}$ 為 $(0,1]$ 上的一族 open covering，但非 $[0,1]$ 上的 open covering

例 2: 設 $\{r_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 為 $[0,1]$ 中一切有理點集

給定 $\epsilon>0$ 令 $I_\epsilon(r_n)=(r_n-\frac{\epsilon}{2^n},r_n+\frac{\epsilon}{2^n})$

$\mathcal{F}=\{I_\epsilon(r_n)|n=1,2,3,\cdots\}$

觀察：$|I_\epsilon(r_n)|$（區間長）$=\frac{\epsilon}{2^{n-1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}|I_\epsilon(r_n)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{n-1}}=2\epsilon<1$ 當 $\epsilon<\frac{1}{2}$

結論：故 $\mathcal{F}$ 非 $[0,1]$ 上的 open covering 當 $\epsilon<\frac{1}{2}$

例 3: $\mathcal{F}_1=\{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-1})|n=2,3,\cdots\}$ 非 $[0,\frac{1}{2}]$ 上的 open covering

$\mathcal{F}_2=(-\delta,\delta)\cup\mathcal{F}_1\quad(\delta>0)$ ，則 $\mathcal{F}_2$ 為 $[0,\frac{1}{2}]$ 上的一族 open covering

是否可從 $\mathcal{F}_2$ 中找到有窮個開區間足以覆蓋 $[0,\frac{1}{2}]$

分析：$\exists N$ s.t. $\frac{1}{N}<\delta$ 故

$(-\delta,\delta)\cup\{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-1})|2\le n\le N\}$ 覆蓋 $[0,\frac{1}{2}]$

<u>Remark</u>

上面這個例子就是 Heine Borel Theorem 的內容：

任意閉區間 $[a,b]$ 上的 open covering$\mathcal{F}$ 都存在有窮個開區間族 $\mathcal{F}'$，使 $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ 覆蓋 $[a,b]$

你說把 $[a,b]$ 改成 $(a,b]$ 難道不行嗎？

不行！且看此例：

$\mathcal{F}_1$ 覆蓋 $(0,\frac{1}{2}]$ 但 $\mathcal{F}_1$ 中卻找不道有窮個子開族 $\mathcal{F}_1'$ 覆蓋 $(0,\frac{1}{2}]$

我第一次讀 Heine Borel 定理，那是 Johnson1964 年版的微積分課本，感到無限納悶，差那麼一點面目全非，好像在變把戲，弄出個有窮子覆蓋，有那麼重要嗎？從高中傳統數學初次接觸到近代數學，疑惑重重。我想同學內心的感受或許跟我當時差不多。同學務必要留心這個定理，它可是近代數學 Compact 概念的搖籃。無窮化有窮，有窮則可隨心所欲，可以取最大，可以取最小；最大的不會是無限大，最小不是 0，一切都在控制之中，可以用它來伐南山之木，可以用它來採東海之珠，妙處無窮！這個定理在近代數學的發展上實在太重要了！請同學們務必要用心。

<u>定理 4.12</u> Heine-Borel 定理

設 $\mathcal{F}$ 為 $[a,b]$ 上的一族 open covering，則在 $\mathcal{F}$ 中一定有有窮個子開區間族已覆蓋 $[a,b]$

分析：

1. 若不然，$[a,b]$ 不能被任意 $\mathcal{F}$ 中有窮個開區間所覆蓋。

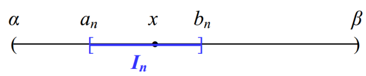
2. 將 $[a,b]$ 二等分，其中必有一等分（取閉區間）不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮開集蓋住，令其為 $I_1=[a_1,b_1]$，$|I_1|=b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$

3. 再將 I_1 二等分其中必有一等分（取閉區間）不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮開集蓋住令其為
   $I_2=[a_2,b_2]$
   $|I_2|=b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$

4. 依此類推以致無窮，得區間套
   $$I_1\supset I_2\supset\cdots$$
   I_n 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮個區間蓋住
   $|I_n|=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ 當 $n\to\infty$
   由區間套定理，$\exists x\in\mathbb{R}$ 使 $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\{x\}$

5. 如圖4.4，$x\in I_n\subset[a,b]\ \therefore x\in[a,b]$
   $\mathcal{F}$ 覆蓋 $[a,b]$ 因此 $\exists I\in\mathcal{F}$ 使 $x\in I$

Figure 4.4:



6. 設 $I=(\alpha,\beta)$，$x\in I$
   而 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=x$
   故 $I_n=[a_n,b_n]\subset(\alpha,\beta)=I$ 當 n 夠大

7. 方才不是說 I_n 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮個開區間蓋住嗎？怎麼現在竟然被一個 $I\in\mathcal{F}$ 蓋住了？矛盾

根據 Heine-Borel 定理我們馬上可以得到連續函數另一個非常重要的性質：均勻連續定理。
<u>定理 4.13</u>（均勻連續定理）
設 f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上均勻連續
分析：

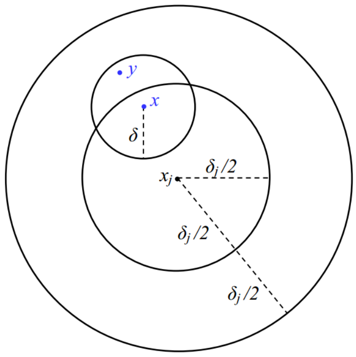
1. $x\in[a,b]$，f 在 x 點連續
   給定 $\epsilon>0$，$\exists\delta_x$ 使
   $|f(y)-f(x)|<\epsilon/2$ 當 $y\in I_{\delta_x}(x)$

2. 考慮 $\mathcal{F}=\{I_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)|x\in[a,b]\}$ 則 $\mathcal{F}$ 為 $[a,b]$ 上一族 open covering
   根據 H-B 定理可以在 $\mathcal{F}$ 中找到有窮子覆蓋
   $$\{I_{\frac{1}{2}\delta_i}(x_i)\}_{i=1}^{n},\quad \delta_i=\delta_{x_i}$$

蓋住 $[a,b]$

3. 取 $\delta=\min\{\frac{1}{2}\delta_i\}$ 則當 $|x-y|<\delta$ 有：
   (i)$x\in[a,b]\Rightarrow x\in I_{\delta_j/2}(x_j)$ for some j
   (ii)$|y-x|<\delta<\frac{1}{2}\delta_j$ ，$x\in I_{\delta_j/2}(x_j)\Rightarrow x,y\in I_{\delta_j}(x_j)$
   $\therefore |f(x)-f(y)|<|f(x)-f(x_j)|+f(x_j-f(y))|<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon$

Figure 4.5:



Remark

1. 上面的分析中第 2 點考慮

$$\mathcal{F}=\{I_{\delta_x/2}(x)|x\in[a,b]\}$$

   取 $\delta_x/2$ 是關鍵，δ_x 太鬆逼不出來

2. 我們初次見識到 Heine Borel 的妙處，無窮化有窮，有窮可以取最小的，最小的大於 0 可以讓我們渡過關山，妙！

例: 試判斷下列二函數在 $[0,\infty)$ 上是否均勻連續

(a) $f(x)=x^2$

(b) $f(x)=\sqrt{x}$

解 (a) 對 $\epsilon=1$ 任意 $\delta>0$ 考慮 $y=x+\frac{\delta}{2}$
且看 $|y^2-x^2|=|y-x||y+x|=\frac{\delta}{2}(2x+\delta/2)>\delta x>1$ 當 $x>1/\delta$
$\therefore$ 非均勻連續

(b) 1. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\leq\frac{1}{2}$ 當 $x\in[1,\infty)$
$\therefore f$ 在 $[1,\infty)$ 上均勻連續
給定 $\epsilon>0$，$\exists\delta_1$ 使
$|x-y|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon\ \forall x,y\in[1,\infty)$

2. 又 f 在 $[0,2]$ 連續 $\therefore$ 在 $[0,2]$ 上均勻連續。對此 ϵ，$\exists\delta_2$ 使

$$|x-y|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon\quad\forall x,y\in[0,2]$$

3. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$
   則 $|x-y| < \delta \Rightarrow x, y \in [0,2]$ 或 $x, y \in [1, \infty)$
   $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
   故 f 在 $[0, \infty)$ 均勻連續

Remark

(b) 中第一點考慮 $[1, \infty)$，第二點考慮 $[0, 2]$ 故意讓他們重疊，重疊寬度 1，取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$

則有 $|x-y| < \delta \Rightarrow x, y \in [1, \infty)$ 或 $x, y \in [0, 2]$ 減少不必要的討論

當然你也可以考慮 $[1, \infty), [0, 1]$，取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$|x-y| < \delta$，x 可能落在 [0,1] 上而 y 在 $[1, \infty)$ 上，找來媒人 1 一樣可以證明 f 在 $[0, \infty)$ 均勻連續，不過不如前述處理簡潔

4.4.4 不連續點（discontinuity）

f 在 x_0 不連續有兩種可能

1. $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x), f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ 存在但不相等
   這種不連續點稱為第一型不連續

2. $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ 或 $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ 不存在
   這種不連續稱為第二型不連續。

例如：

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

0 為第二型不連續點

又如：

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{array}$$

每一點 $x \in [0, 1]$ 都是第二型不連續點

當 f 在 (a, b) 上為單調函數時，f 的不連續點必為第一型

且若 x 為不連續點，則 $f(x-) < f(x+)$ 當 f 單調遞增（或 $f(x-) > f(x+)$ 當 f 單調遞減）

不妨設 f 單調遞增。因此對這種不連續點我們可以放進一個有理數 $r(x)$

使 $f(x-) < r(x) < f(x+)$

由於 $f \nearrow on(a, b),\ \ x \neq y \Rightarrow r(x) \neq r(y)$

令 $D = \{x | x \in (a, b), f$ 在 x 點不連續$\}$

則 $\phi : D \to \mathbb{Q}$ 為嵌入寫像，$\mathbb{Q}$ 可數，故 D 可數

將之陳述為定理

定理 4.13 設 f 在 (a, b) 上單調（monotonic），則 f 在 (a, b) 上的不連續點頂多可數

4.5 督脈的貫通

微積分的出現改變了數學的思維和內容。如果說早期的數學是一條河流，那麼微積分出現以後的數學發展可說是汪洋大海。早期的數學可以說是有限的數學（finite mathematics），微積分則處處是 limit，以有窮探索無窮，無窮是個神秘世界，上窮碧落下通黃泉，超越形像，凌過時空，人們所面對的問題其深度，廣度，遠非生活在河流中的人類所可以以想像，其間挑戰無數，人才輩出，寫下人類文明燦爛繽紛美麗多彩的一章。

微積分基本定理是近代數學的核心定理，沒有它也就沒有近代數學。

對於連續函數，微分與積分是互逆的過程。打個比方說，如果石頭風化成泥沙是微分，那麼泥沙沉積日久又成石頭就是積分。這是微積分第一第二基本定理的內容，前已述及。從實數的完備性到微積分基本定理的導出，這一連串的數學推演，我稱之為微積分的任脈，前已證明。但積分的存在問題一直懸而未決。現在萬事俱備，只欠東風。只需運一點功，督脈立通，任督二脈既通，你的數學思想就了無障礙，可以與天地共呼吸矣。

4.5.1 Riemann 積分的存在問題

設 f 為定義於 $[a,b]$ 上的實函數

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$$

稱為 $[a,b]$ 上的一個分割（Partition）

令 $M_i = \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$, $\quad m_i = \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$, $\quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$U(P,f) = \sum M_i \Delta x_i$ 稱為 f 對 P 的上和（upper sum）

$L(P,f) = \sum m_i \Delta x_i$ 稱為 f 對 P 的下和（lower sum）

並令

$\bar{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P U(P,f)$ 稱為 f 在 $[a,b]$ 上的上積分（upper integral）

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P L(P,f)$ 稱為 f 在 $[a,b]$ 上的下積分（lower integral）

若 $\bar{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$，我們稱 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分（Riemann integrable），以 $\int_a^b f(x)dx$ 表此共同值，稱為 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 積分

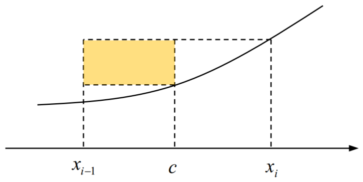
<u>觀察</u>：

1. 若 P 為 $[a,b]$ 上的一分割，$c \in [a,b]$, $P' = P \cup \{c\}$，則

$$U(P',f) \leq U(P,f) \tag{24}$$
$$L(P',f) \geq L(P,f) \tag{25}$$

（如圖4.6：$U(P,f) - U(P',f) =$ 斜線區小長方形面積 ≥ 0, (25) 同理）

Figure 4.6:



2. $P_1 \subset P_2$，則

$$U(P_2, f) \le U(P_1, f)$$
$$L(P_2, f) \ge L(P_1, f)$$

3. $L(P_1, f) \le U(P_2, f), \quad \forall P_1, P_2$
説明：令 $P = P_1 \cup P_2$，則根據觀察 2，有

$$L(P_1, f) \le L(P, f) \le U(P, f) \le U(P_2, f)$$

4. $\overline{\int_a^b} f(x)dx \le \underline{\int_a^b} f(x)dx$

<u>引理 4.2</u> $\int_a^b f(x)dx$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P$ 使

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

説明：

($\Rightarrow$) 根據定義，$\forall \epsilon > 0$，
$\exists P_1$ 使 $U(P_1, f) \le \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon/2$
$\exists P_2$ 使 $L(P_2, f) \ge \underline{\int_a^b} f(x)dx - \epsilon/2$
令 $P = P_1 \cup P_2$，根據觀察 2

$$U(P, f) \le U(P_1, f) \le \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon/2 = \int_a^b f(x)dx + \epsilon/2 \tag{26}$$
$$L(P, f) \ge L(P_1, f) \ge \underline{\int_a^b} f(x)dx - \epsilon/2 = \int_a^b f(x)dx - \epsilon/2 \tag{27}$$

(26)(27) $\Rightarrow U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$

($\Leftarrow$)

$$L(P, f) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le U(P, f), \quad \forall P \tag{28}$$

依假設
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P$ 使 $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \Rightarrow 0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$
ϵ 任意 $\therefore \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$
故 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分

好了！我現在就要打通你的督脈

定理 4.14（積分的存在定理）

設 f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分

分析：

1. f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上均匀連續，給定 $\epsilon > 0$，$\exists\delta$ 使

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b-a), \text{當} |x-y| < \delta, x, y \in [a,b]$$

2. 設 P 為 $[a,b]$ 上的分割

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

考慮 P 夠細，使 $\|P\| = \max \Delta x_i < \delta$

f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上連續，$\therefore f$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上取最大最小值

$$M_i = \max_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$m_i = \min_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(\eta_i), \quad \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

則 $M_i - m_i < \epsilon/(b-a)$，因 $|\xi_i - \eta_i| < \delta$

3. 據此，我們有：

$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &= \sum (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum \Delta x_i \\ &= \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

4. 根據引理 4.2，$\int_a^b f(x)dx$ 存在

至此，任督二脈全通矣，好不快哉！

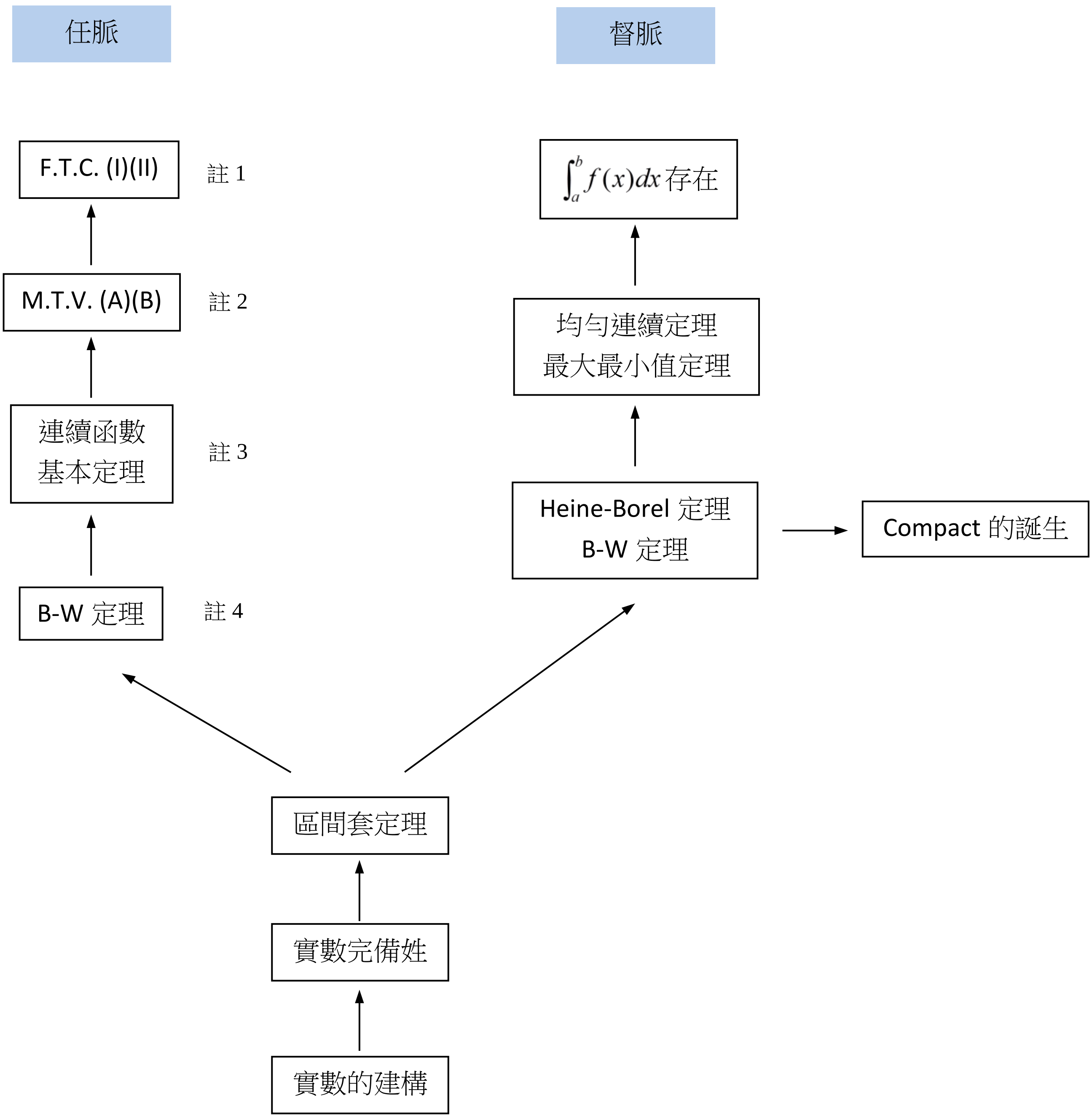
從微積分的誕生到任督二脈的貫通這中間經歷了兩百年，由憑直覺做數學飽受批判，到對極限的認識以及對實數的了解，微積分走過千山，渡過萬水，不斷地豐富它的內涵。它不但改變了數學的內容。也改變了人類生活的樣貌，可以這麼說：

沒有微積分就沒有現代文明。

想想：我們何其有幸，在短短幾個月內就能學習承接人類文明史上這精彩的一章。

在此我再次提醒，督脈的貫通出現了一個非常重要的工具：Heine Borel 定理。它導出了現代數學一個極其重要的概念－ Compact。其影響既深且遠，同學學習高等微積分務必要對它有所領悟才能學好現代數學。我們將於第五、六章中進一步介紹它。

為了同學們理路上的清晰，我再次圖示微積分這任督二脈如下：


任脈
督脈
F.T.C. (I)(II)
註 1
M.T.V. (A)(B)
註 2
連續函數
基本定理
註 3
B-W 定理
註 4
$\int_a^b f(x)dx$ 存在
均勻連續定理
最大最小值定理
Heine-Borel 定理
B-W 定理
Compact 的誕生
區間套定理
實數完備性
實數的建構

註 1: F.T.C. Fundamental Theorem of Calculus

F.T.C. (I)：微積分第一基本定理

F.T.C. (II)：微積分第二基本定理

註 2: M.V.T. Mean Value Theorem

M.V.T.(A)：微分型均值定理

M.V.T.(B)：積分型均值定理

註 3: 連續函數基本定理：中間值定理 & 最大最小值定理

註 4: Bolzano-Weierstrass 定理