第 15 章
向量場 (Vector Fields)

目錄

15.1 向量場與純量場 (Vector Fields and Scalar Fields)

向量場

定義 15.1.1. (1) 令 $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ 的向量場 (vector field) 是一個函數 $\mathbf{F}: D \to \mathbb{R}^2$, 將 (x, y) 對應到向量 $\mathbf{F}(x, y)$。

(2) 令 $E \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ 的向量場 (vector field) 是一個函數 $\mathbf{F}: E \to \mathbb{R}^3$, 將 (x, y, z) 對應到向量 $\mathbf{F}(x, y, z)$。通常可表爲 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z) \rangle = F_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$.

(3) 若其分量函數 F_1, F_2, F_3 爲連續函數, 則稱其爲連續向量場。

(4) 若其分量函數 F_1, F_2, F_3 可微, 則稱其爲可微向量場。

(5) 若其分量函數 F_1, F_2, F_3 的任意階偏導函數均連續, 則稱其爲平滑 (smooth)。

(6) 一個純量函數也可稱爲純量場 (scalar field)。

例 15.1.2. 一個點質量 m 位於 P_0 位置向量爲 $\mathbf{r}_0$, 則重力場爲

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -km\frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\text{。}$$

其大小爲 $\frac{km}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}$。

例 15.1.3. 一物體繞 z-軸旋轉的角速度 (angular velocity) 爲 $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$, 則速度場爲 $\mathbf{v}(x, y, z) = -\Omega y\mathbf{i} + \Omega x\mathbf{j}$ 。

例 15.1.4. 描繪 $\mathbb{R}^3$ 上的向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$。

例 15.1.5. (1) 重力場 (gravitation field) $\mathbf{F}(x, y, z)$,

(2) 電力場 (electrostatic field) $\mathbf{E}(x, y, z)$,

(3) 流體速度場 (velocity field) $\mathbf{v}(x, y, z)$,

(4) 梯度場 (gradient field) $\nabla f(x, y, z)$。

場線

例 15.1.6. (1) 在一向量場上, 一曲線稱爲場線 (field lines) 或積分曲線 (integral curves), 若其上每一點之切向量 爲此向量場的向量。

(2) 流體速度場之場線亦稱爲流線 (flow lines, streamlines); 力場之場線亦稱爲力線 (lines of force)。

註 15.1.7. 向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)\rangle$ 之場線的微分方程可表爲

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)} 。$$

例 15.1.8. (1) 試求重力場 $\mathbf{F}(x, y, z) = -km\frac{(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$ 的場線。

(2) 試求速度場 $\mathbf{v}(x, y, z) = -\Omega y\mathbf{i} + \Omega x\mathbf{j}$ 的場線。

(3) 試求 $\mathbf{F} = \langle xz, 2x^2z, x^2\rangle$ 的場線。

極座標下的向量場

例 15.1.9. (1) 向量場 $\mathbf{F}$ 可表爲 $\mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta)\hat{\theta}$, 其中

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j},\\ \hat{\theta} &= -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j},\end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{r}}$ 稱爲徑向向量 (radial vector), F_r 稱爲徑向分量; $\hat{\theta}$ 稱爲橫向向量 (transverse vector), F_θ 稱爲橫向分量。

(2) 極座標方程 $r = r(\theta)$ 的曲線可表爲 $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ 。

(3) 描述 $\mathbf{F}(r, \theta) = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\theta}$, 並求其場線。

15.2 保守場 (Conservative Fields)

保守場

例 15.2.1. 求 $f(x,y) = x^2y - y^3$ 的梯度場。

定義 15.2.2. 一個向量場 $\mathbf{F}$ 若是某個純量函數 ϕ 的梯度場, 即 $\mathbf{F} = \nabla\phi$, 則稱 $\mathbf{F}$ 爲保守場 (conservative vector field), ϕ 稱爲 $\mathbf{F}$ 的位勢函數 (potential function)。

例 15.2.3. 重力場 $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{-km}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ 是保守場, 其位勢函數是 $\phi = \frac{km}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$。

例 15.2.4. 速度場 $\mathbf{v}(x,y,z) = -\Omega y\mathbf{i} + \Omega x\mathbf{j}$ 不是保守場。

保守場的必要條件

定理 15.2.5. 若 $\mathbf{F}(x,y) = \langle F_1(x,y), F_2(x,y)\rangle$ 是 $xy-$平面區域 D 上的保守場,F_1 及 F_2 在 D 上有連續的一階偏導函數, 則在 D 上 $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$。

定理 15.2.6. 假設 $\mathbf{F}$ 定義在空間的單連通區域上。$\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3\rangle$ 之分量函數有連續的 一階偏導函數。則 $\mathbf{F}$ 爲保守場的必要條件是 $\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$。

定義 15.2.7. 若 $\phi(x,y,z)$ 是保守場 $\mathbf{F}$ 的位勢函數, 則等直値曲面 $\phi(x,y,z) = C$ 稱爲 $\mathbf{F}$ 的等位 曲面。對平面亦有類似定義。

例 15.2.8. 證明 $\mathbf{F}(x,y) = \langle x, -y\rangle$ 是保守場, 求其位勢函數, 描述其場線及等位曲線。

例 15.2.9. 向量場 $\mathbf{F} = \langle xy - \sin z, \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x\cos z\rangle$ 在 $D = \{(x,y,z) : z \neq 0\}$ 上是否爲保守場? 若是, 求其位勢函數。

例 15.2.10. 對 $(x,y) \neq (0,0)$, 定義向量場 $\mathbf{F} = \langle \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\rangle$ 及純量場 $\theta(x,y) = (x,y)$ 的極角 θ, 使得 $0 \leq \theta < 2\pi$ 。驗證:

(a) $\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y)$, $(x,y) \neq (0,0)$,

(b) 對所有 $(x,y) \neq (0,0)$, 且 $0 < \theta < 2\pi$, $\nabla\theta(x,y) = \mathbf{F}(x,y)$,

(c) $\mathbf{F}$ 在整個平面上不是保守場。

15.3 線積分 (Line Integrals)

線積分

定義 15.3.1. 在空間中, $f(x,y,z)$爲一實値函數, 其定義域爲 D, 曲線 $C : \mathbf{r}(t) = \langle g(t), h(t), k(t)\rangle$, $t \in [a,b]$ 爲包含在 D 中的曲線。於是 $f(g(t), h(t), k(t))$ 爲定義在 $[a,b]$ 上的函數。將曲線 C 分割爲 n 段 $s_1, \cdots, s_n$, 其長度爲 $\triangle s_1, \cdots, \triangle s_n$ 在每一段上取任一點 (x_k, y_k, z_k), 則得 Riemann 和 $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\triangle s_k$。若極限 $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\triangle s_k$ 存在, 則定義它是 $f(x,y,z)$ 在 C上 的線積分 (line integral of f along C), 記爲 $\int_C f(x,y,z)ds$ 。

註 15.3.2. (1) (線積分計算法) 若 $\mathbf{r}(t)$ 為平滑，則 $s(t)=\int_a^t \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right| d\tau=\int_a^t |\mathbf{v}(\tau)|d\tau$。故

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(g(t),h(t),k(t))|\mathbf{v}(t)|dt$$

$$=\int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt。$$

(2) 對平面上的曲線和函數也可同樣定義線積分。

(3) 若 C 為有限條平滑曲線 $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 的聯集, 即 C 是逐段平滑曲線, 則 $\int_C f(x,y)\,ds=\int_{C_1} f(x,y)\,ds+\ldots+\int_{C_n} f(x,y)\,ds$。

(4) 線積分與曲線的參數選法無關。

例 15.3.3. C 為從 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,0)$, 再到 $(1,1,1)$ 之折線段。求 $f(x,y,z)=x-3y^2+z$ 在 C 上的線積分。

例 15.3.4. C_1 是 $y=x^2$ 上從 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的弧, C_2 是從 $(1,1)$ 到 $(1,2)$ 的線段, C 是它們的聯集。求 $\int_C 2xds$。

例 15.3.5. 令 C 為 $x^2+y^2=1$ 的上半圓, 求 $\int_C (2+x^2y)\,ds$。

例 15.3.6. 若 C 為 $\langle\cos t,\sin t,t\rangle$,$t\in[0,2\pi]$，求 $\int_C y\sin z ds$。

例 15.3.7. C 為 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, 求 $\int_C x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}ds$。

例 15.3.8. C 為 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, 求 $\int_C |y|ds$。

例 15.3.9. C 為 $y=a\cosh\frac{x}{a}$, 求 $\int_C \frac{ds}{y^2}$。

例 15.3.10. C 為 $x^2+y^2=z^2$ 與 $y^2=ax$ 之交線上, 從 $(0,0,0)$到 $(a,a,\sqrt{2}a)$ 的曲線段, 求 $\int_C zds$。

<u>線積分的應用</u>

定義 15.3.11. 若一金屬線位於空間平滑曲線 C 上，其密度為 $\delta(x,y,z)$，則

(1) 質量為 $M=\int_C \delta(x,y,z)ds$。

(2) 對座標面的一次矩為 $M_{yz}=\int_C x\delta ds, M_{xz}=\int_C y\delta ds, M_{xy}=\int_C z\delta ds$。

(3) 質心 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 為 $\overline{x}=\frac{M_{yz}}{M},\overline{y}=\frac{M_{xz}}{M},\overline{z}=\frac{M_{xy}}{M}$。

(4) 對座標軸及一般直線之二次矩為 $I_x=\int_C (y^2+z^2)\delta ds, I_y=\int_C (x^2+z^2)\delta ds$,
$I_z=\int_C (x^2+y^2)\delta ds, I_L=\int_C r^2\delta ds$，其中 $r(x,y,z)$ 為 (x,y,z) 到直線 L 的距離。

(5) 對直線 L 的迴轉半徑為 $R_L=\sqrt{\frac{I_L}{M}}$。

例 15.3.12. 令 $\mathcal{C}$ 為圓心在原點, 半徑為 a 之上半圓, 求 $\mathcal{C}$ 對 x-軸的力矩。

例 15.3.13. 求 $\mathcal{C}:\mathbf{r}=\langle a\cos t,a\sin t,bt\rangle$, $0\le t\le 2\pi$ 的形心。

例 15.3.14. 一曲線 $\mathcal{C}$ 是 $z=2-x^2-2y^2$ 與 $z=x^2$ 的交集, 在 $(0,1,0)$ 到 $(1,0,1)$ 的部份, 在 (x,y,z) 的密度為 xy。求其質量。

15.4 向量場的線積分 (Line Integrals of vector fields)

功

定義 15.4.1. 令 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的連續力場, 此力作用在一物體上, 將其沿著平滑曲線 C 移動, 令 $\mathbf{T}$ 爲 C 的單位切向量。則所做的功 (work) 爲

$$W=\int_C \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{T}(x,y,z)\,ds=\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\text{ 。}$$

[註] 功的五種表法

$$\begin{aligned}W&=\int_a^b \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_a^b(F_1\frac{dx}{dt}+F_2\frac{dy}{dt}+F_3\frac{dz}{dt})dt\\&=\int_a^b F_1dx+F_2dy+F_3dz\text{ 。}\end{aligned}$$

例 15.4.2. 求力場 $\mathbf{F}(x,y)=\langle x^2,-xy\rangle$ 沿著 $\frac{1}{4}$ 圓 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t\rangle,t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 所做的功。

例 15.4.3. 力 $\mathbf{F}=\langle y-x^2,z-y^2,x-z^2\rangle$ 沿著曲線 $\mathbf{r}(t)=\langle t,t^2,t^3\rangle$ 作用, 從 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$ 所作的功爲何? 若 $\mathbf{r}(t)=\langle t,t,t\rangle$, 則如何?

流量積分

定義 15.4.4. (1) 若一個曲線之起點與終點相同, 則稱爲封閉曲線或線圈 (closed curve or loop)。

(2) 若一個封閉曲線, 除端點外, 本身均不相交, 則稱爲簡單曲線 (simple curve)。

定義 15.4.5. 令 $\mathbf{F}$ 爲連續速度場, $\mathbf{r}(t)$ 爲一曲線, 則沿著這曲線從 $t=a$ 到 b 的流量 (flow) 爲 $\int_a^b \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$。此積分稱爲流量積分 (flow integral)。若此曲線爲封閉線圈 (closed loop), 則此流量稱爲此曲線的環流量 (circulation)。

例 15.4.6. 一液體的速度場爲 $\mathbf{F}=\langle x,y,z\rangle$ 。求它沿著曲線 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle,t\in[0,2\pi]$ 的流量。

例 15.4.7. 求速度場 $\mathbf{F}=\langle x-y,x\rangle$ 沿著封閉曲線 $\mathbf{r}=\langle\cos t,\sin t\rangle,t\in[0,2\pi]$ 的環流量。

例 15.4.8. 令 $\mathbf{F}=\langle y,-x\rangle$。求沿以下曲線由 $(1,0)$ 到 $(0,-1)$ 的線積分 $\int_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

(a) 直線段,

(b) 在單位圓上逆時針轉四分之三圈。

例 15.4.9. 令 $\mathbf{F}=\langle y^2,2xy\rangle$。求沿以下曲線由 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的線積分 $\int_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 。

(a) 直線 $y=x$,

(b) 曲線 $y=x^2$,

(c) 從 $(0,0)$ 到 $(0,1)$ 再到 $(1,1)$ 的折線段。

15.5 線積分基本定理與路徑獨立

線積分基本定理

定理 15.5.1. (線積分基本定理) 平滑曲線 C 定義爲 $\mathbf{r}(t)$,$t \in [a,b]$。f 爲可微函數,∇f 在 C 上連續, 則

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))。$$

例 15.5.2. 重力場 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$ 對質量 m 之物體沿著平滑曲線從 $(3,4,12)$ 移到 $(2,2,0)$。求所做的功。

路徑獨立

定義 15.5.3. (1) 一個區域 D 是連通的 (connected) 表示其上任兩點均可以用 D 上的路徑加以連接。

(2) 平面上的連通區域 D, 其上任意封閉曲線的內部均只包含 D 的點, 則稱 D 爲單連通區域 (simply connected)。

定理 15.5.4. 令 D 爲開連通區域, $\mathbf{F}$ 爲 D 上的平滑向量場。下列敍述是等價的:

(1) $\mathbf{F}$ 爲 D 上的保守場。

(2) 對 D 上任意逐段平滑封閉曲線 $\mathcal{C}$, $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ 。

(3) 任給 D 上兩點 P_1, P_2 (可能相同), 則對 D 上任意以 P_1 爲起點, 以 P_2 爲終點之逐段平滑曲線 $\mathcal{C}$, 線積分 $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 之值均相等。

例 15.5.5. 求 $I = \oint_{\mathcal{C}} (e^x \sin y + 3y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy$, $\mathcal{C}$ 是繞橢圓 $4x^2 + y^2 = 4$ 逆時針旋轉。

例 15.5.6. 令 C 爲從 $(1,\pi)$ 到 $(2,\pi)$ 的直線段, 求 $\int_C (1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx + (\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$。

例 15.5.7. 求 $\int_C y dx + x dy + 4dz$, 其中 C 是連接 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,1)$ 的線段。

例 15.5.8. 求 A, B 使得向量場 $\mathbf{F} = \langle Ax\sin(\pi y), x^2\cos(\pi y) + Bye^{-z}, y^2e^{-z}\rangle$ 爲保守場, 並求 $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, 其中 $\mathcal{C}$ 是

(a) 曲線 $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin 2t, \sin^2 t\rangle$, $0 \le t \le 2\pi$,

(b) $z = x^2 + 4y^2$ 與 $z = 3x - 2y$ 的交線上, 從 $(0,0,0)$ 到 $(1, \frac{1}{2}, 2)$ 的部份。

例 15.5.9. 令 $A = (1,0), B = (0,1), C = (-1,0), D = (0,-1)$, 曲線 $\mathcal{C}$ 從 A 開始沿著 $ABCD$ 繞一圈, 求 $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ 。

15.6 參數曲面 (Parametric surfaces)

定義 15.6.1. (1) R 爲 uv-平面上之區域，$\mathbf{r}(u,v)=\langle f(u,v),g(u,v),h(u,v)\rangle$ 爲 R 上的連續向量場，且在 R 上爲一對一。則 $\mathbf{r}$ 的值域 S 稱爲参數曲面(parametric surface)。

(2) $\mathbf{r}$ 以及 R 稱爲 S 的參數化(parametrization)，R 是參數定義域，u,v 爲參數。

例 15.6.2. (a) 描述向量方程 $\mathbf{r}\,(u,v)=\langle 2\cos u, v, 2\sin u\rangle$ 之曲面。

(b) 若 $\theta\leq u\leq\frac{\pi}{2}$,$0\leq v\leq 3$, 其曲面爲何?

例 15.6.3. 描述曲面 $\mathbf{r}=\langle a\cos u\sin v, a\sin u\sin v, a\cos v\rangle$,$0\leq u\leq 2\pi, 0\leq v\leq\frac{\pi}{2}$。其邊界爲何?

例 15.6.4. P_0 點的位置向量爲 $\mathbf{r}_0$, 一平面通過 P_0 且包含兩個非平行的向量 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$, 求該平面的向量方程。

例 15.6.5. 寫出球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的參數方程式。

例 15.6.6. 求柱面 $x^2+y^2=4$,$0\leq z\leq 1$ 之參數方程式。

例 15.6.7. 寫出曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in R$ 的參數式。

例 15.6.8. 將錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\leq z\leq 1$, 參數化。

例 15.6.9. 將曲線 $y=f\,(x)$,$a\leq x\leq b$ 繞 x 軸旋轉 $(f\,(x)\geq 0)$。其参數表示爲 $x=x$、$y=f\,(x)\cos\theta$、$z=f\,(x)\sin\theta$, $a\leq x\leq b$、$0\leq\theta\leq 2\pi$。

15.7 面積分(Surface Integrals)

面積分

定義 15.7.1. 曲面 S 爲 $\mathbf{r}\,(u,v)=\langle x\,(u,v)\,,y\,(u,v)\,,z\,(u,v)\rangle$,$(u,v)\in D$。若 D 爲矩形, 將其分割成小矩形 R_{ij}, 其邊長爲 $\triangle u$ 及 $\triangle v$。於是曲面 S 被分成對應的小片 S_{ij}, 在 S_{ij} 上任選樣本點 P_{ij}^* 則可得 Riemann 和 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right)\triangle S_{ij}$($\triangle S_{ij}$ 爲 S_{ij} 之面積)。則 f 在曲面 S 之面積分爲 $\iint_S f\,(x,y,z)\,dS=\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right)\triangle S_{ij}$。

定義 15.7.2. (1) 一個空間中的集合 $\mathcal{S}$ 若滿足以下條件, 則稱爲平滑曲面 (smooth surface): 對任意 $P\in\mathcal{S}$ 均有一鄰域 N, 使得它是平滑函數 $g(x,y,z)$ 的定義域, 且 (i) $N\cap S=\{Q\in N: g(Q)=0\}$, (ii) $\nabla g(Q)\neq 0,\forall Q\in N\cap S$。

(2) 一個參數曲面若其內點滿足以上條件, 則稱爲平滑曲面。

定理 15.7.3. 若 $\mathcal{S}$ 由 $\mathbf{r}\,(u,v)$,$(u,v)\in D$ 所定義 (D 不見得是矩形)。則

(1) 其法向量爲 $\mathbf{n}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\langle\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\rangle$。

(2) 其面積元 (area element) 爲 $dS=|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,dudv=\sqrt{(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2+(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})^2+(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2}dudv$。

(3) $\mathcal{S}$ 的曲面面積為 $\iint_{\mathcal{S}} dS$ 。

(4) $f(x,y,z)$ 在 $\mathcal{S}$ 的面積分為

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS = \iint_{D} f(\mathbf{r}(u,v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA。$$

例 15.7.4. (1) 若曲面 $\mathcal{S}$ 為 $z = g(x,y)$,$(x,y) \in D$。則

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS = \iint_{D} f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dA \text{ 。}$$

(2) 若曲面 $\mathcal{S}$ 滿足 $G(x,y,z)=0$, 且一對一地投影到 xy-平面上的 D。假設在 $\mathcal{S}$ 上, G 有連續的 一階偏導數且均不為 0, 則

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS = \iint_{D} f(x,y,g(x,y))\left|\frac{\nabla G(x,y,z)}{G_z(x,y,z)}\right|dxdy \text{ 。}$$

例 15.7.5. 曲面 $\mathcal{S}$ 為 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上介於 $z=0$ 與 $z=1$ 的部份, 求 $\iint_{\mathcal{S}} zdS$ 。

例 15.7.6. 求柱面 $x^2+y^2=2ay$ 位於球 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 之內的面積 。

例 15.7.7. 求在半球 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上的 $\iint_{\mathcal{S}} z^2dS$ 。

例 15.7.8. $x=1, y=1, z=1$ 在第一卦限切出一立方體 , 它在第一卦限部分的表面為 S 。求 $g(x,y,z)=xyz$ 在 S 上的 積分 。

例 15.7.9. 若曲面 S 之側面 S_1 為柱面 $x^2+y^2=1$, 其底 S_2 為平面 $z=0$ 上的圓盤 $x^2+y^2\le 1$, 其頂部在平面 $z=1+x$ 上。求 $\iint_S zdS$。

面積分的應用

定義 15.7.10. 令S 為一薄殼, $\delta(x,y,z)$ 為其密度, 則

(1) 質量 $M=\iint_S \delta(x,y,z)dS$。

(2) 對座標面之一次矩 , $M_{yz}=\iint_S x\delta dS, M_{xz}=\iint_S y\delta dS, M_{xy}=\iint_S z\delta dS$。

(3) 質心 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 為 $\overline{x}=\frac{M_{yz}}{M},\overline{y}=\frac{M_{xz}}{M},\overline{z}=\frac{M_{xy}}{M}$。

(4) 對座標軸之二次矩 $I_x=\iint_S(x^2+y^2)\delta dS, I_y=\iint_S(x^2+z^2)\delta dS, I_z=\iint_S(x^2+y^2)\delta dS$; 對 L 之二次矩 $I_L=\iint_S r^2\delta dS$, 其中 $r(x,y,z)$ 為 (x,y,z) 到直線 L 的距離。

(5) 對一直線 L 的迴轉半徑為 $R_L=\sqrt{\frac{I_L}{M}}$ 。

例 15.7.11. 求參數曲面 $x=2uv, y=u^2-v^2, z=u^2+v^2$, 其中 $u^2+v^2\le 1$, 對 z-軸的慣性矩。

例 15.7.12. 求對 $z=0$ 的力矩 $\iint_{\mathcal{S}} zdS$, 其中 $\mathcal{S}$ 是 $z^2=1+x^2+y^2$ 介於 $z=1$, $z=\sqrt{5}$ 之間的部份。

例 15.7.13. 一個半徑為 a 之半球殼, 其密度 δ 為常數, 求其質心。

15.8 賦向曲面 (Oriented surfaces)

定義 15.8.1. (1) 一個平滑曲面 $\mathcal{S}$, 假設有單位向量場 $\hat{\mathbf{N}}(P)$ 定義在 $\mathcal{S}$ 上, 且在 $\mathcal{S}$ 上是連續的。如果我們對每個點 P, $\hat{\mathbf{N}}(P)$ 均爲 P 的法向量, 則稱 S 是*賦向曲面* (oriented surface), $\hat{\mathbf{N}}(P)$ 決定其賦向 (orientation), $\hat{\mathbf{N}}$ 之方向稱爲正向 (positive side)。

(2) 一個曲面 S 的邊界曲線爲 C,S 的方向可以衍生 C 的方向: 若你在 C 上沿著該方向前進, 且你的頭指向 S 的方向 $\hat{\mathbf{N}}$, 則曲面 S 在你的左側。

(3) 正賦向曲面 S 所定義的賦向曲線 C 記爲 ∂S。

(4) 一個曲面如果是一個立體 E 的邊界, 則稱爲*封閉曲面* (closed surface)。

註 15.8.2. (1) Mobius band: $\begin{cases} x = 2\cos\theta + r\cos\frac{\theta}{2} \\ y = 2\sin\theta + r\cos\frac{\theta}{2} \\ z = r\sin\frac{\theta}{2}, \end{cases}$ $-\frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{2}$、$0 \le \theta \le 2\pi$, 爲非賦向曲面。

(2) 若曲面 S 爲 $z = g(x,y)$, 則一個自然的方向是 $\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \left\langle -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right\rangle$

(3) 若曲面 S 由 $\mathbf{r}(u,v)$ 所定義, 則一個自然的方向是 $\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$。

(4) 若曲面 S 滿足 $G(x,y,z) = 0$, 則一個自然的方向是 $\hat{\mathbf{N}} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$ 。

(5) 在球面上 $\mathbf{r}(\varphi,\theta) = \langle a\sin\varphi\cos\theta, a\sin\varphi\sin\theta, a\cos\varphi \rangle$, 則 $\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{a}\mathbf{r}(\varphi,\theta)$。

15.9 通量積分 (Flux integrals)

定義 15.9.1. 若 $\mathbf{F}$ 是賦向曲面 $\mathcal{S}$ 上的連續向量場, $\mathbf{F}$ 經過 $\mathcal{S}$ 的通量 (flux) 是 $\mathbf{F}$ 之法向分量 在 S 上的積分, 即

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \text{ 。}$$

註 15.9.2. (1) 若 S 是由 $\mathbf{r}(u,v)$ 所定義, $\hat{\mathbf{N}}$ 爲自然賦向。則

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA \text{ 。}$$

(2) 若 S 是曲面 $z = g(x,y)$, 則

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-F_1 \frac{\partial g}{\partial x} - F_2 \frac{\partial g}{\partial y} + F_3 \right) dA \text{ 。}$$

例 15.9.3. 令 $\mathcal{S}$ 爲半徑爲 a 之單位圓, 求向量場 $\mathbf{F} = \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ 向球外的 通量, 其中 $\mathbf{r} = \langle x,y,z \rangle$ 。

例 15.9.4. 求向量場 $\mathbf{F} = \langle x,y,z \rangle$ 經由曲面 $x^2 + y^2 \le a^2, -h \le z \le h$ 向外的總通量。

例 15.9.5. 求向量場 $\mathbf{F} = \langle z, 0, x^2 \rangle$ 經由曲面 $z = x^2 + y^2$ 在 $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ 的 部份向上的通量。

例 15.9.6. 求向量場 $\mathbf{F} = \langle y, -x, 4 \rangle$ 經由曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在 第一卦限的部份向上的通量。

例 15.9.7. 求向量場 $\mathbf{F} = \langle \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, 1 \rangle$ 經由曲面 $\mathbf{r} = \langle u\cos v, u\sin v, u^2 \rangle$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ 向下的通量。

例 15.9.8. 若 S 是由 $z = 1 - x^2 - y^2$ 及 $z = 0$ 所圍成之區域的邊界, $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y, x, z \rangle$, 求 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$。

例 15.9.9. 曲面 S 是由柱面 $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ 被 $x = 0$ 及 $x = 1$ 所圍出 。求 $\mathbf{F} = \langle 0, yz, z^2 \rangle$ 經由 S 之向外通量 。

例 15.9.10. 求 $\mathbf{F} = \langle yz, x, -z^2 \rangle$ 沿著曲面 $y = x^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 4$, 向外的通量。