第 16 章

向量微積分 (Vector Calculus)

目錄

16.1 梯度, 旋度與散度 **169**

16.2 梯度, 旋度與散度之等式 **170**

16.3 Green 定理 **171**

16.4 散度定理 **172**

16.5 Stokes 定理 **173**

16.1 梯度, 旋度與散度(Gradient, Curl and Divergence)

定義 16.1.1. (1) 令 $f(x,y,z)$ 爲純量場, 則其梯度 (gradient) 爲 $\mathbf{grad} f(x,y,z) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle$ 。

(2) 若 $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 上的向量場, 且 $\frac{\partial F_1}{\partial x}$、$\frac{\partial F_2}{\partial y}$、$\frac{\partial F_3}{\partial z}$ 均存在, 則 $\mathbf{F}$ 的散度(divergence) 定義爲 $\mathbf{div}\ \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$。

(3) 令 $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 上的向量場, 若 F_1、F_2、F_3 的導函數存在, 定義 $\mathbf{F}$ 的旋度 (curl) 爲 $\mathbf{curl}\ \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left\langle \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$。

例 16.1.2. 求以下向量場的散度與旋度。

(1) $\mathbf{F} = \langle xy, (y^2 - z^2), yz \rangle$,

(2) $\mathbf{F} = \langle xe^y, -ye^x \rangle$ 。

<u>散度之意義</u>

定理 16.1.3. 令 $\mathcal{S}_\epsilon$ 爲圓心在 P, 半徑爲 ϵ 之球面, $\hat{\mathbf{N}}$ 爲圓上向外的單位法向量, $\mathbf{F}$ 是個平滑向量場, 則

$$\mathbf{div}\ \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \text{ 。}$$

例 16.1.4. (a) 驗證: 向量場 $\mathbf{F} = \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ 在平面上除點 $(0,0,0)$ 外, 其散度均爲 0 。

(b) 令 D 爲一區域。若原點在 D 之內, 則經由 D 之表面向外之總通量 (total flux) 爲何?

(c) 若原點在 D 之外, 則如何?

定義 16.1.5. 令 $d_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } |x| \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{if } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$。 Dirac 分布(distribution, 或 Dirac delta 函數) 是 $d_n(x)$ 在 $n \to \infty$ 的“極限” 。它滿足: 對所有平滑函數 $f(x)$, 均有 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$ 。

例 16.1.6. 令 $\mathbf{F} = \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, 則 $\textbf{div } \mathbf{F}(x,y,z)$ 是個分布, $\textbf{div } \mathbf{F}(x,y,z) = 4\pi m \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ 。

旋度之意義

例 16.1.7. 速度場 $\mathbf{v} = \langle -\Omega y, \Omega x, 0\rangle$, $\mathcal{C}_\epsilon$ 爲圓心在 P, 半徑爲 ϵ 之圓 ,

(a) 求 $\mathbf{F}$ 繞著 $\mathcal{C}_\epsilon$ 逆時針方向的環流量 。

(b) 它和 $\mathbf{v}$ 之旋度的關係如何?

定理 16.1.8. 若 $\mathcal{S}_\epsilon$ 是個圓心在 P, 半徑爲 ϵ 之圓盤, 單位法向量爲 $\hat{\mathbf{N}}$, 其邊界爲圓 $\mathcal{C}_\epsilon$。若 $\mathbf{F}$ 爲向量場, 則

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{N}} \cdot \textbf{curl } \mathbf{F}(P) \text{ 。}$$

定義 16.1.9. 流體的速度場爲 $\mathbf{v}$, 在 P 的局部角速度 (local angular velocity) 定義爲 $\Omega(P) = \frac{1}{2}\textbf{ curl } \mathbf{v}(P)$ 。

16.2 梯度, 旋度與散度之等式 (Some Identities Involving Grad, Curl and Div)

註 16.2.1.

$$\textbf{grad} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle$$

$$\textbf{div } \mathbf{F}(x,y,z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\textbf{curl } \mathbf{F}(x,y,z) = \nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Laplacian 算子 ∇^2 之定義: 對純量場 ϕ,

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \textbf{div grad} \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

對向量場 $\mathbf{F}$,

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \langle \nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3 \rangle \text{ 。}$$

定理 16.2.2. 令 ϕ, ψ 爲純量場, $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 爲向量場。假設它們都是平滑的, 則

(1) $\nabla(\phi\psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi$

(2) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})$

(3) $\nabla \times (\phi \mathbf{F}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F})$

(4) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

(5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$

(6) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$

(7) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \qquad (\mathbf{div\ curl} = 0)$

(8) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \qquad (\mathbf{curl\ grad} = 0)$

(9) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \qquad (\mathbf{curl\ curl} = \mathbf{grad\ div} - \text{Laplacian})$

定義 16.2.3. (1) 一個向量場 $\mathbf{F}$ 若在區域 D 上滿足 $\mathbf{div}\ \mathbf{F} = 0$, 則稱爲*無散的* (或螺線的, solenoidal)。

(2) 一個向量場 $\mathbf{F}$ 若在區域 D 上滿足 $\mathbf{curl}\ \mathbf{F} = 0$, 則稱爲*無旋的* (irrational)。

註 16.2.4. (1) 每個保守場爲無旋的。

(2) 每個向量場的旋度場爲無散的。

定理 16.2.5. 若 $\mathbf{F}$ 是單連通區域 D 上的平滑無旋的向量場, 則 $\mathbf{F}$ 是保守場。

定理 16.2.6. 令 D 爲空間區域具有以下性質: D 上任一個封閉曲面均圍住一個 D 上的區域。若 $\mathbf{F}$ 是 D 上的平滑無散的向量場, 則存在向量場 $\mathbf{G}$ 使得 $\mathbf{F} = \mathbf{curl}\ \mathbf{G}$。$\mathbf{G}$ 稱爲 $\mathbf{F}$ 的位勢向量 (vector potential)

例 16.2.7. 驗證: 向量場 $\mathbf{F} = \langle x^2 + yz, -2y(x+z), xy + z^2 \rangle$ 是無散的, 並求其位勢向量。

例 16.2.8. 證明 $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle xz, xyz, -y^2 \rangle$ 不爲保守場。

例 16.2.9. (a) 證明 $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2 \rangle$ 爲保守場。

(b) 求一函數 f 使 $\nabla f = \mathbf{F}$。

例 16.2.10. 證明向量場 $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle xz, xyz, -y^2 \rangle$ 不爲一向量場的旋度場。

16.3 Green 定理 (Green's Theorem)

定義 16.3.1. 一個平面封閉曲線 $\mathcal{C}$ 若滿足下列條件, 則稱爲*正賦向*(positive orientation): 當 t 增加時, $\mathcal{C}$ 的內部 D 均在其左手側。

定理 16.3.2. (Green) 令 R 爲 xy-平面上正規封閉區域, 其邊界 $\mathcal{C}$ 爲正賦向, 逐段平滑, 簡單封閉曲線 (可能包含有限條)。若 $\mathbf{F}$ 在 R 上是平滑向量場, 則

$$\int_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy = \iint_R \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dA\ 。$$

定理 16.3.3. (Green 定理的向量形式)

(1) $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \textbf{curl } \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}dA$。

(2) $\oint_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}ds = \iint_R \textbf{div } \mathbf{F}(x,y)\,dA$。

例 16.3.4. 令 $\mathbf{F}=\langle x-y,x\rangle, C:\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t\rangle, t\in[0,2\pi]$。驗證 Green 定理。

註 16.3.5. D 的面積爲 $A(D)=\oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$。

例 16.3.6. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之內部面積。

例 16.3.7. 求曲線 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, t\in[0,2\pi]$, 所包圍的區域之面積。

例 16.3.8. 曲線 $\mathbf{r}=\langle 3(\cos t+\sin t), 2(\sin t-\cos t)\rangle,\quad 0\le t\le 2\pi$ 圍成一橢圓, 求其面積 。

例 16.3.9. $\mathcal{C}$ 是四分之一圓 $x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0$ 的正向邊界, 求 $\oint_{\mathcal{C}}(x-y^3)dx+(y^3+x^3)dy$ 。

例 16.3.10. $\mathcal{C}$ 是平面上包圍區域 R 的正向簡單封閉曲線, 且它不通過原點, 求 $\oint_{\mathcal{C}}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ 。

例 16.3.11. 若 C 爲三角形曲線, 是從 $(0,0)$到 $(1,0)$、$(1,0)$ 到 $(0,1)$、$(0,1)$ 到 $(0,0)$ 的折線段, 求 $\oint_C x^4dx+xydy$。

例 16.3.12. 若 C 爲圓 $x^2+y^2=9$, 求 $\oint_C\left(3y-e^{\sin x}\right)dx+\left(2x+\sqrt{y^4+1}\right)dy$。

例 16.3.13. 求 $\mathbf{F}=\langle x,y^2\rangle$ 通過由 $x=\pm1, y=\pm1$ 所圍之矩形的外通量 (outward flux)。

16.4 散度定理 (Divergence Theorem)

定理 16.4.1. (散度定理, Divergence Theorem): 令 D 爲正規空間區域, $\mathcal{S}$ 是 D 的邊界曲面並取正賦向。平滑向量場 $\mathbf{F}$ 定義在包含 D 的開區域上。則

$$\iiint_D \textbf{div } \mathbf{F}dV = \iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS\text{ 。}$$

例 16.4.2. 令 S 爲球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, a>0, \mathbf{F}=\langle x,y,z\rangle$。驗證散度定理。

例 16.4.3. 令 $\mathbf{F}=\langle bxy^2, bx^2y, (x^2+y^2)z^2\rangle$, $\mathcal{S}$ 是 包圍柱體 $x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le b$ 的封閉曲面。求 $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 。

例 16.4.4. $\mathcal{S}$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 求 $\iint_{\mathcal{S}}(x^2+y^2)dS$ 。

例 16.4.5. 一個錐體其底是任意平滑的有界平面區域, 面積爲 A, 錐體高爲 h 。對 $\mathbf{F}=\langle x,y,z\rangle$ 應用散度定理, 求錐體體積 。

例 16.4.6. 令 $\mathbf{F}=\frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, D 爲空間中任意正規區域, 其內部包含原點 。令 $\mathcal{S}$ 爲其表面, $\hat{\mathbf{N}}$ 爲 $\mathcal{S}$ 上向外的單位法向量。求 $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS$ 。

例 16.4.7. 令 S 爲柱面 $x^2+z^2=a^2, 0\le y\le b$ 在第一卦限的部分, 求 $\mathbf{F}=\langle x,y^2,z\rangle$ 通過 $\mathcal{S}$ 向上的通量 。

例 16.4.8. 令 S 爲 $x=1, y=1$ 及 $z=1$ 在第一卦限所圍出的立體 , 求 $\mathbf{F}=\langle xy,yz,xz\rangle$ 經由 S 之表面的通量。

例 16.4.9. S 爲由 $z=1-x^2$、平面 $z=0$、$y=0$、$y+z=2$ 所圍成的區域的表面。$\mathbf{F}(x,y,z)=\left\langle xy, y^2+e^{xz^2}, \sin xy\right\rangle$。求 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS$。

定理 16.4.10. (散度定理的變異,Variants of the Divergence Theorem): 令 D 爲正規空間區域, $\mathcal{S}$ 是 D 的邊界曲面並取正賦向。平滑向量場 $\mathbf{F}$ 定義在包含 D 的開區域上, ϕ 爲純量場。則

(a)

$$\iiint_D \mathbf{curl}\ \mathbf{F}dV=-\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\times\hat{\mathbf{N}}dS,$$

(b)

$$\iiint_D \mathbf{grad}\phi dV=\iint_{\mathcal{S}}\phi\hat{\mathbf{N}}dS\ 。$$

16.5 Stokes 定理 (Stokes' Theorem)

定理 16.5.1. (Stokes) 令 $\mathcal{S}$ 爲逐段平滑賦向曲面, $\hat{\mathbf{N}}$ 爲單位法向量場, 且其邊界 $\mathcal{C}$ 是 逐段平滑封閉曲線, 並取正賦向 (可能包含有限條)。若 $\mathbf{F}$ 爲一平滑向量場, 定義在包含 $\mathcal{S}$ 之開區域上。則

$$\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{curl}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS=\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\ 。$$

[註] 若 S 爲平面上的區域, 且賦向向上。則 Stokes 定理化約成 Green 定理。

例 16.5.2. 令 $\mathcal{S}$ 爲半球 $x^2+y^2+z^2=9, z\geq 0, \mathbf{F}=\langle y,-x,0\rangle$, 驗證 Stokes 定理。

例 16.5.3. 若 $\mathcal{C}$ 爲 $x^2+y^2=1$ 與 $2x+2y+z=3$ 的相交曲線, 取一賦向使得投影到 xy-平面時爲逆時針方向, $\mathbf{F}=\langle -y^3, x^3, z^3\rangle$, 求 $\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 。

例 16.5.4. 若 $\mathcal{S}$ 爲球體 $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ 在 xy-平面以上的部份, $\hat{\mathbf{N}}$ 爲 $\mathcal{S}$ 上向外 的單位法向量, $\mathbf{F}=\langle y^2\cos xz, x^3e^{yz}, -e^{-xyz}\rangle$。求 $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{curl}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS$ 。

例 16.5.5. $\mathcal{S}$ 是在球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上, 位於 $x^2+y^2=1$ 之內, 且在 xy-平面之上的部分, $\mathbf{F}=\langle xz, yz, xy\rangle$, 求 $\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{curl}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS$。

例 16.5.6. 曲線 $\mathcal{C}$ 是平面 $z=2$ 與錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 之交線 。求 $\mathbf{F}=\langle x^2-y, 4z, x^2\rangle$ 沿著 $\mathcal{C}$ 的逆時針方向 (由上看) 的環流量。

例 16.5.7. 平面 $2x+y+z=2$ 在第一卦限所截出的平面區域, 其邊界爲 $\mathcal{C}$, 並取由上看的逆時針方向。令 $\mathbf{F}=\langle xz, xy, 3xz\rangle$。求 $\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。