第 12 章
偏導數 (Partial Derivative)

目錄

12.1 多變數函數 (Functions of Several Variables)

定義 12.1.1. 令 D 爲 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, 則 D 上的 n 變數實函數 (real-valued function of n-variables) f, 爲從 D 映至 $\mathbb{R}$ 的函數, 其中 D 爲其定義域 (domain), $f(D)$ 爲其值域 (range)。

註 12.1.2. (1) 若 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 爲 n 變數函數。我們可將 f 視爲:

(a) n 個實變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函數。

(b) $\mathbb{R}^n$ 中之點 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的函數。

(c) 向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的函數。

(2) 若一函數未指明其定義域, 則其定義域就設定爲所有使函數式有意義之範圍。

例 12.1.3. 求下列函數之定義域及值域:

(1) $w = \sin xy$,

(2) $w = xy \ln z$,

(3) $w = \frac{1}{xy}$,

(4) $w = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

(5) $w = \sqrt{y - x^2}$ 。

12.2 圖形 (Graphs)

圖形

定義 12.2.1. 令 $f(x, y)$ 爲定義在 D 上的雙變數函數, 則集合

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y),\, (x, y) \in D\}$$

稱爲 f 的圖形 (graph)。

例 12.2.2. 描述下列函數之之圖形:

(1) $f(x, y) = 3(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}),\, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - 2x,$

(2) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$

(3) $h(x, y) = 4x^2 + y^2$ 。

等值曲線

定義 12.2.3. 任給一常數 k, 曲線 $f(x, y) = k$ 稱爲函數 f 的等值曲線 (level curve, contour curve)。

例 12.2.4. 等高線、等溫線、等壓線均爲等值曲線。

例 12.2.5. 圖爲 $f(x, y)$ 的等值曲線, 試估計 $f(1, 3)$ 及 $f(4, 5)$。

例 12.2.6. 描繪以下函數的的等值曲線:

(1) $f(x, y) = 6 - 3x - 2y,$

(2) $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$,

(3) $h(x, y) = 4x^2 + y^2$。

例 12.2.7. 若方程式 $x^2 + (y - z)^2 = 2z^2,\, z \geq 0$ 定義一個函數$z = g(x, y)$. 試作此函數之等值曲線。

等值曲面

定義 12.2.8. 若 $w = f(x, y, z)$ 爲三變數函數, 則曲面 $f(x, y, z) = c$ 稱爲 f 的等值曲面 (level surface)。

例 12.2.9. 描繪以下函數的的等值曲面:

(1) $f(x, y, z) = x^2 - z$,

(2) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

12.3 極限 (Limits)

定義與性質

定義 12.3.1. (1) 令 $z = f(x, y)$。若對任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $(x, y) \in \operatorname{Dom} f$, 都滿足

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - L| < \epsilon,$$

則稱 f 在 (x_0, y_0) 處的極限值爲 L, 記爲

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L\text{。}$$

(2) 若 f 爲 n 變數函數, 則 $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ 表示 $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ 使得對所有 $\mathbf{x} \in D$, 都滿足

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon\text{。}$$

性質 12.3.2. 若 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ 且 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = M$, 則

(1) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x, y) \pm g(x, y)) = L \pm M$。

(2) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = LM$。

(3) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x, y) = kL$。

(4) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L}{M}$, 若 $M \neq 0$。

(5) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}$, 其中 r, s 爲互質的整數, $s \neq 0$, 且若 s 爲偶數, 則設 $L > 0$。

例 12.3.3. 求下列各極限值:

(1) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} (2x - y^2)$,

(2) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 y$,

(3) $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},2)} y \sin(\frac{x}{y})$,

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ 。

決定極限值

註 12.3.4. (1) 在單變數函數時, $f(x)$ 在 $x = a$ 的極限存在, 其充要條件爲沿著右側逼近的 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 以及沿著左側逼近的 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 均存在且相等。

(2) 在多變數時, 則不只有兩個方向。考慮 $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$, 必須是沿著任何通過 $\mathbf{p}$ 之曲線逼近 $\mathbf{p}$ 時, 其極限均存在, 且都相等。

(3) 因此在 $\mathbb{R}^2$ 上, 考慮 $(x,y)\to(a,b)$。若沿著路徑 (path) C_1 時, $f(x,y)\to L_1$; 而 沿著路徑 C_2 時, $f(x,y)\to L_2$, 但 $L_1\neq L_2$, 則 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 不存在。

例 12.3.5. 討論下列各極限值:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$。

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$。

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$。

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$。

註 12.3.6. 由極座標求極限: 若對任意 $\epsilon>0$, 均存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(r,\theta)-L|<\epsilon, \quad \forall\, 0<r<\delta, \forall\,\theta,$$

則 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$。

例 12.3.7. 討論下列各極限值:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$。

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$。

定義 12.3.8. (1) $f(x,y)$ 若滿足下列條件:

(i) f 在 (x_0,y_0) 有定義,

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在,

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$,

則稱 f 在 (x_0,y_0) 連續。

(2) 若 f 在 D 上每一點都連續, 則稱 f 在 D 上連續。

(3) 若 f 在定義域上每一點均連續, 則稱 f 爲連續函數。

註 12.3.9. (1) 多項式函數爲連續函數。

(2) 有理函數在其定義域上連續。

例 12.3.10. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2y^3-x^3y^2+3x+2y\right)$。

例 12.3.11. 證明 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原點以外都連續。

性質 12.3.12. 若 f 在 (x_0,y_0) 連續, g 爲單變數函數且在 $f(x_0,y_0)$ 連續, 則 $h=g\circ f$ 在 (x_0,y_0) 連續。

例 12.3.13. 討論 $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ 之連續性。

12.4 偏導數 (Partial Derivative)

定義

定義 12.4.1. (1) 若 $(a,b)\in \mathrm{Dom}\, f$, 則 f 在 (a,b) 對 x 的偏導數 (parital derivative) 爲

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h};$$

對 y 的偏導數爲

$$f_y(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h},$$

(若右式的極限存在。)

(2) 對所有 x-偏導數存在之點 (x_0,y_0), 可定義一個函數 $f_x(x,y)$, 其對應爲 $(x_0,y_0)\mapsto f_x(x_0,y_0)$, 則 f_x 稱爲 f 的 x-偏導函數。同理, 對應 $(x_0,y_0)\mapsto f_y(x_0,y_0)$ 的函數 $f_y(x,y)$ 則稱爲 f 的 y-偏導函數。

符號 12.4.2. 若 $z=f(x,y)$, 則

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x=z_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=D_xf,$$
$$\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\text{。}$$

對 y 的偏微分也相同。

例 12.4.3. 令 $f(x,y)=x^3y^2$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$。

例 12.4.4. 令 $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$, 求 $f_x(2,1)$ 及 $f_y(2,1)$。

例 12.4.5. 令 $f(x,y)=\sin\frac{x}{1+y}$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$。

例 12.4.6. 若 $f(x,y)=e^{xy}\cos(x+y)$, 求 $f_1(0,\pi)$ 。

定義 12.4.7. 若 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 爲 n 變數函數, 則對變數 x_i 的偏微分定義爲

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{h},$$

記爲

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}=f_{x_i}=f_i=D_if\text{。}$$

例 12.4.8. (1) 令 $f(x,y,z)=x\sin(y+3z)$, 求 $\frac{\partial f}{\partial z}$。

(2) 若 $f(x,y,z)=e^{xy}\ln z$, 求 f_x,f_y,f_z。

(3) 求 $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{2xy}{1+xz+yz})$ 。

例 12.4.9. 若 $z=f(x,y)$ 滿足 $yz-\ln z=x+y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

例 12.4.10. 若 f 是處處可微的函數, 證明 $z=f(\frac{x}{y})$ 滿足偏微分方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 。

幾何意義

性質 12.4.11. 偏導數 $f_x(a,b)$ 的幾何意義: 三維空間中的曲面 $z=f(x,y)$ 與平行於 xz-平面的截面 $y=b$ 交於一曲線 $g(x)=f(x,b)$, 則曲線在 $x=a$ 的斜率爲 $g'(a)=f_x(a,b)$。

例 12.4.12. 令 $f(x,y)=4-x^2-2y^2$, 求 $f_x(1,1)$ 及 $f_y(1,1)$, 並解釋其幾何意義。

例 12.4.13. 平面 $x=1$ 與曲面 $z=x^2+y^2$ 交成一拋物線, 求它在 $(1,2,5)$ 的切線斜率。

例 12.4.14. (可偏微分, 但不連續。) 令 $f(x,y)=\begin{cases} 0, & xy\neq 0 \\ 1, & xy=0 \end{cases}$ 。

(a) 當 (x,y) 沿著直線 $y=x$ 逼近 $(0,0)$ 時, 求 $f(x,y)$ 的極限。

(b) 證明 f 在原點不連續。

(c) 證明 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 均存在。

12.5 切平面 (Tangent Planes)

定義 12.5.1. (1) 設 $z=f(x,y)$ 有連續的一階偏導函數, 曲面 S 爲其圖形, 且 $P(x_0,y_0,z_0)\in S$。令平面 $y=y_0$ 及 $x=x_0$ 在 C 上的截線爲 C_1 及 C_2, 且在 C_1 及 C_2上, 通過 P 的切線分別爲 T_1 及 T_2, 則在 S 上, 通過 P 點的*切平面*爲包含 T_1 及 T_2 之平面。

(2) 在 P 點的*法線*(normal line) 爲通過 P 且與切平面垂直的直線。

定理 12.5.2. (1) 若 f 有連續的偏導函數, 則曲面 $z=f(x,y)$ 在點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 之切平面爲

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)。$$

(2) 在 P 點之法線爲 $\begin{cases} x=x_0+f_x(P)t \\ y=y_0+f_y(P)t \\ z=z_0-t \end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$。

例 12.5.3. (1) 求 $z=2x^2+y^2$ 在 $(1,1,3)$ 的切平面及法線。

(2) 求 $z=\sin(xy)$ 在 $(\frac{\pi}{3},-1)$ 的切平面及法線方程式。

例 12.5.4. 那個水平面與 $z=x^2-4xy-2y^2+12x-12y-1$ 相切

例 12.5.5. 求 $(3,0,0)$ 到曲面 $z=x^2-y^2$ 的距離

12.6 高階偏導數

定義 12.6.1. 若 $f(x,y)$ 可偏微, 且其一階偏導數 f_x, f_y 均可偏微, 則 f 的各二階偏導數定義爲:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)。$$

符號 12.6.2. 令 $z = f(x,y)$, 則:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$
$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$
$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}。$$

例 12.6.3. 令 $f(x,y) = x\cos y + ye^x$, 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。

Clairaut 定理

定理 12.6.4. (Clairaut) 令 $f(x,y)$ 爲定義在 D 上的函數, 且 $(a,b) \in D$。若 f 及 f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} 在 D 上均爲連續, 則 $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$。

例 12.6.5. 令 $z = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

註 12.6.6. (1) 高階偏導數亦可定義, 例如

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}。$$

(2) 若各偏導數均連續, 則 $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$。

例 12.6.7. 令 $f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$, 求 f_{xyz}。

例 12.6.8. 若 $f(x,y,z) = \sin(3x + yz)$, 求 f_{xxyz}。

例 12.6.9. 若 $f(x,y) = e^{x-2y+3z}$, 求 $f_{223}(x,y), f_{232}(x,y), f_{322}(x,y)$

定義 12.6.10. (1) 偏微分方程 (partial differential equation) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 稱爲 Laplace 方程, 而其解稱爲調和函數 (harmonic function)。

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 稱爲波方程 (wave equation), 其解稱爲波函數 (wave function), 可用來表示小提琴之弦的振動。

例 12.6.11. 證明 $u(x,y) = e^{kx}\sin(ky)$ 及 $v(x,y) = e^{kx}\cos(ky)$ 滿足 Laplace 方程。

例 12.6.12. 若 f, g 是二次可微的函數, 證明 $w = f(x-ct) + g(x+ct)$ 滿足波方程。

12.7 連鎖法則 (Chain Rules)

定理 12.7.1. (連鎖律之一)

(1) 若 $z = f(x,y)$ 爲可微函數, 且 $x = g(t)$ 及 $y = h(t)$ 均爲 t 的可微函數, 則 z 是 t 的可微函數, 且

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t)) \cdot y'(t) \text{ 或 } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}。$$

(2) 在 t_0 的導數為 $\frac{dw}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{dy}{dt}(t_0)$。

例 12.7.2. 若 $z=x^2y+3xy^4$, 其中 $x=\sin 2t, y=\cos t$, 求 $\frac{dz}{dt}|_{t=0}$。

例 12.7.3. 令 $T(x,y)=x^2y+3xy^4$ 為溫度函數。若沿著曲線 $x=\sin 2t, y=\cos t$ 移動, 求在 $(0,1)$ 點時溫度的變化率。

定理 12.7.4. (連鎖律之二) 若 $z=f(x,y)$ 為可微函數, $x=g(s,t), y=h(s,t)$ 為可微函數, 則

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds},$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}。$$

[註] 此定理可表為

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix}。$$

例 12.7.5. (1) 令 $z=e^x\sin y$, $x=st^2, y=s^2t$。求 $\frac{\partial z}{\partial s}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial t}$。

(2) 令 $w=x^2+y^2$, $x=r-s$, $y=r+s$。求 $\frac{\partial w}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial w}{\partial s}$。

定理 12.7.6. (連鎖律) 若 u 為 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的可微函數, 每個 x_j 是 $t_1,t_2,\ldots,t_m$ 的可微函數, 則 u 是 $t_1,t_2,\ldots,t_m$ 的可微函數, 且

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}。$$

例 12.7.7. (1) 令 $w=xy+z$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$。求 $\frac{dw}{dt}$ 及 $\frac{dw}{dt}|_{t=0}$。

(2) 若 $w=x+2y+z^2$, $x=r/s$, $y=r^2+\ln s$, $z=2r$, 求 $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial r}(2,e)$, 及 $\frac{\partial w}{\partial s}$。

(3) 令 $u=x^4y+y^2z^3$, 其中 $x=rse^t, y=rs^2e^{-t}, z=r^2s\sin t$。求 $\frac{\partial u}{\partial s}|_{(r,s,t)=(2,1,0)}$。

例 12.7.8. 若 $g(s,t)=f(s^2-t^2,t^2-s^2)$ 且 f 為可微, 證明 g 可滿足 $t\frac{\partial g}{\partial s}+s\frac{\partial g}{\partial t}=0$。

例 12.7.9. 若 $z=f(x,y)$ 有連續的二階偏導函數, 且 $x=r^2+s^2, y=2rs$。求 $\frac{\partial z}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$。

例 12.7.10. 求 $\frac{\partial}{\partial x}f(x^2y,x+2y)$ 及 $\frac{\partial}{\partial y}f(x^2y,x+2y)$。

例 12.7.11. 將 $z=h(s,t)=f(g(s,t))$ 的偏導函數以 f, f' 及 g 的偏導函數表出 。

例 12.7.12. 若 $z=f(x,y,t)$, 其中 $x=g(t), y=h(t)$, 求 $\frac{dz}{dt}$ 。

例 12.7.13. 若 $z=z(u,v,r)$, 且 $u=u(x,y,r), v=v(x,y,r)$ 而 $r=r(x,y)$, 寫出 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

例 12.7.14. 求 $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x^2-y^2,xy)$。

例 12.7.15. 若 $f(x,y)$ 是調和的, 證明 $f(x^2-y^2,xy)$ 也是調和的。

例 12.7.16. 若 $z=f(x,y)$ 有連續的二階偏導函數, 且若 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$, 證明 $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 。

例 12.7.17. (a) 地表溫度與地點 (x,y,z) 和時間 t 有關, 若氣象汽球 在地球表面沿著曲線 $x=f(t), y=g(t), z=h(t)$ 移動, 則其溫度對時 間的 變化率為何?

(b) 若 $T(x,y,z,t)=\frac{xy}{1+z}(1+t)$, 氣球軌跡為曲線 $x=t,\ y=2t,\ z=t-t^2$。求在 $t=1$ 其溫度對時間的變化率為何?

12.8 線性估計與可微性 (Linear Approximation and Differentiability)

定義 12.8.1. (1) 給定 $z = f(x, y)$, 則

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

稱爲 f 在 (a, b)的線性化 (linearization)。

(2) $f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ 稱爲 f 在 (a, b) 的線性估計 (linear approximation)。

例 12.8.2. 求 $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ 在 $(3, 2)$ 的線性化。

例 12.8.3. 求 $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ 在 $(2.2, -0.2)$ 的估計值。

定義 12.8.4. 給定 $z = f\,(x, y)$, 假設在包含 (a, b) 的一個開區域 D 上, f_x 及 f_y 均有定義。若

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

則稱 f 在 (a, b) 點可微 (differentiable)。

定理 12.8.5. (平均值定理) 若 $f_x(x, y$ 及 $f_2(x, y)$ 在 (a, b) 的某鄰域上連續, 且 h, k 之絕對值足夠小, 則存在 θ_1, θ_2 介於 0 與 1 之間, 使得

$$f(a_h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta_1 h, b + k) + kf_y(a + h, b + \theta_2 k)\ 。$$

<u>可微與連續</u>

定理 12.8.6. 若在 (a, b) 附近 f_x 及 f_y 存在, 且均在 (a, b) 連續, 則 f 在 (a, b) 可微。

定理 12.8.7. 若 $f(x, y)$ 在 (a, b) 可微, 則 f 在 (a, b) 連續。

例 12.8.8. 若 $f(x, y) = x^3+xy^2$, 求 $g(h, k) = f(x+h, y+k)-f(x, y)-f_1(x, y)h-f_2(x, y)k$ 及 $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} g(h, k)$。

定義 12.8.9. 令 $z = f(x, y)$, 且 x 及 y 爲獨立變數。全微分 (total differential) 定義爲

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy\ 。$$

註 12.8.10. 線性估計定理爲 $f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy = f(a, b) + dz$。

例 12.8.11. 測量直圓錐的底半徑及高之值分別爲 10 cm 及 25 cm, 但測量時可能分別有 0.1 cm 的誤差。則估計其體積時, 至多有多少誤差?

例 12.8.12. 週期爲 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. 在擺長增加 2 %, 重力加速度減少0.6 % 時, 週期改變的百分比爲若干。

註 12.8.13. 在多變數時, 仍有類似結果:

$$\begin{aligned} f\,(x, y, z) &\approx f\,(a, b, c) + f_x\,(a, b, c)\,(x - a) + f_y\,(a, b, c)\,(y - b) + f_z\,(a, b, c)\,(z - c)\,, \\ \triangle w &= f\,(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) - f\,(x, y, z)\,, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\ 。\end{aligned}$$

例 12.8.14. 一立方體之三邊長測量分別爲 35 cm、60 cm 及 40 cm。每次測量可能誤差爲 0.2 cm。則估算體積時至多有多少誤差?

12.9 方向導數 (Directional derivatives)

定義 12.9.1. 若 $f(x,y)$ 在 xy-平面上的區域 R 有定義, $P_0(x_0,y_0)\in R$, $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ 爲單位向量, 若極限

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}$$

存在, 則將其記爲 $(D_{\mathbf{u}}f)(P_0)$, 稱爲 $f(x,y)$ 在 P_0 沿著 $\mathbf{u}$ 方向的*方向導數* (Directional derivative)。

[註] $f_x=D_{\mathbf{i}}f,f_y=D_{\mathbf{j}}f$。

定理 12.9.2. 若 f 是 x,y 的可微函數, 則 f 沿著 單位向量 $\mathbf{u}=\langle a,b\rangle$ 的方向導數爲 $D_{\mathbf{u}}f\left(x,y\right)=f_x\left(x,y\right)a+f_y\left(x,y\right)b$。

例 12.9.3. (1) 求 $f(x,y)=x^2+xy$ 在 $P_0(1,2)$ 沿著 $\mathbf{u}\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ 的方向導數 。

(2) 若 $f\left(x,y\right)=x^3-3xy+4y^2$, $\mathbf{u}$ 是角度爲 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 的單位向量, 求 $D_{\mathbf{u}}f\left(1,2\right)$。

(3) 求 $f(x,y)=xe^y+\cos xy$ 在 $(2,0)$ 點, 沿著 $\mathbf{v}=\langle 3,-4\rangle$ 方向的方向導數。

例 12.9.4. 若與 x-軸的夾角爲ϕ, 求 $f(x,y)$ 在 ϕ 方向的二階方向導數。

12.10 梯度 (Gradients)

<u>定義</u>

定義 12.10.1. (1) $f(x,y)$ 在 $P(a,b)$ 的*梯度向量* (gradient vector) 爲 $\nabla f(P)=\langle\frac{\partial f}{\partial x}(P),\frac{\partial f}{\partial y}(P)\rangle$。
(2) f 的*梯度函數* (gradient) 是向量值函數 $\nabla f\left(x,y\right)=\langle f_x\left(x,y\right),f_y\left(x,y\right)\rangle$。

定理 12.10.2. 若 $f(x,y)$ 在一個包含 $P(a,b)$ 的開區域上可微, 則 $D_{\mathbf{u}}f(P)=(\nabla f)(P)\cdot\mathbf{u}$。

例 12.10.3. 若 $f\left(x,y\right)=\sin x+e^{xy}$, 求 ∇f 及 $\nabla f\left(0,1\right)$。

例 12.10.4. 求 $f\left(x,y\right)=x^2y^3-4y$ 在點 $(2,-1)$ 沿著$\langle 2,5\rangle$ 方向的方向導數。

註 12.10.5. (1) 在多變數時,$D_{\mathbf{u}}f\left(\mathbf{x}_0\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+h\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)}{h}$。

(2) 若 $w=f\left(x,y,z\right)$, 則 $\nabla f=\langle f_x,f_y,f_z\rangle$, $D_{\mathbf{u}}f\left(x,y,z\right)=\nabla f\left(x,y,z\right)\cdot\mathbf{u}$。

例 12.10.6. 令 $f\left(x,y,z\right)=x\sin yz$

(a) 求 $f\left(x,y,z\right)$ 的梯度。

(b) 求 f 在 $(1,3,0)$ 沿著 $\mathbf{v}=\langle 1,2,-1\rangle$ 的方向導數。

<u>變化率</u>

定理 12.10.7. (1) 若 $P\in\operatorname{Dom}f$, 則 $f(x,y)$ 在 P 點沿著 $\nabla f(P)$ 的方向增加最快, 且變化率 $D_{\mathbf{u}}f(P)=|\nabla f(P)|$。

(2) $f(x,y)$ 在 P 點沿著 $-\nabla f(P)$ 的方向減少最快, 且 $D_{\mathbf{u}}(P)=-|\nabla f(P)|$。

(3) 若 $\nabla f(P) \neq 0$, 且 $\mathbf{u}$ 垂直於 $\nabla f(P)$, 則 $f(x,y)$ 在 P 點沿著此方向的變化率爲 0。

例 12.10.8. 在 (x,y) 的溫度爲 $T(x,y) = x^2 e^{-y}$ 在 $(2,1)$ 沿著那一個方向溫度增加最快? 增加率多少?

例 12.10.9. 令 $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$。求 $f(x,y)$ 在 $P(1,1)$ 增加最快的方向, 減少最快的方向, 變化率爲 0 的方向。

例 12.10.10. 一人在山邊的溪旁, 此區域的地圖顯示在 (x,y) 的地面高度爲 $h(x,y) = \frac{20000}{3+x^2+3y^2}$, 此人位於 $(3,2)$ 。

(a) 在 $(3,2)$ 的溪流方向如何? 溪流下降速度如何?

(b) 求溪流路徑的方程式。

(c) 如果此人想要往 15° 的山坡爬, 則該沿那一個方向?

例 12.10.11. 求 $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ 在點 $P(1,1,0)$ 沿著 $\mathbf{v} = \langle 2,-3,6 \rangle$ 方向的方向導數。它在 P 沿著哪個方向變化量增加最快, 其變化率爲何?

<u>切平面</u>

定理 12.10.12. 令 $f(x,y,z)$ 爲可微函數, S 爲 $f(x,y,z)$ 的一個等值曲面。$P(a,b,c)) \in S$。若 C 爲 S 上通過 P 的任一曲線, 則 $\nabla f(P)$ 在 P 點垂直於 C。

定義 12.10.13. (1) 等值曲面 $S: f(x,y,z) = c$ 上的一點 P, $\nabla f(P)$是 S 在 P 點的法向量。

(2) *切平面* (tangent plane) 是通過 P 且與 $\nabla f(P)$ 垂直的平面。

(3) 其*法線* (normal line) 是通過 P 且與 $\nabla f(P)$ 同向的直線。

註 12.10.14. 令 S 爲 $f(x,y,z)$ 的一個等值曲面。$P(a,b,c) \in S$。

(1) S 在 P 的切平面爲 $F_x(P)(x-a) + F_y(P)(y-b) + F_z(P)(z-c) = 0$。

(2) 其法線爲 $\begin{cases} x = x_0 + f_x(P)t \\ y = y_0 + f_y(P)t \\ z = z_0 + f_z(P)t \end{cases}$ 。

例 12.10.15. 若 $f(x,y) = x^2 + y^2$。驗證 $\nabla f(1,2)$ 與 $x^2 + y^2 = 5$ 在 $(1,2)$ 的切線垂直。

例 12.10.16. 求橢圓 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ 在點 $(-2,1)$ 的切線方程式。

例 12.10.17. (1) 求 $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ 在 $(-2,1,-3)$ 之切平面及法線方程式。

(2) 求曲面 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ 在 $P(1,2,4)$ 之切平面及法線方程式。

例 12.10.18. 兩曲面 $z = x^2 - y^2$ 及 $xyz + 30 = 0$ 相交的曲線在 $(-3,2,5)$ 的切向量爲何?

例 12.10.19. 曲面 $x^2 + y^2 - 2 = 0$ 及 $x + z - 4 = 0$ 相交成一橢圓 E, 求 E 上之點 $P(1,1,3)$ 之切線的參數式。(兩種解法)

12.11 隱函數微分 (Implicit Differentiation)

定理 12.11.1. (隱函數定理, Implicit Function Theorem) 若 $F(x,y)$ 定義在 包含 (a,b) 的一開盤 D 上, 其中 $F(a,b)=0$, $F_y(a,b)\neq 0$ 且 F_x 及 F_y 在 D 上連續, 則在 (a,b) 的附近, 可以利用 $F(x,y)=0$ 將 y 定義成 x 的可微函數, 且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y},\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{(a,b)}=-\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}。$$

定理 12.11.2. (隱函數定理之二) 若 $F(x,y,z)$ 定義在包含 (a,b,c)之球 B 上, 且 $F(a,b,c)=0$,$F_2(a,b,c)\neq 0$, 在 B 上, F_x、F_y、F_z 均爲連續, 則在 (a,b,c) 的附近, 利用 $F(x,y,z)=0$, z 可以定義成 x 和 y 的可微函數, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}。$$

例 12.11.3. (1) 若 $x^3+y^3=6xy$, 求 y'。

(2) 若 $x^3+y^3+z^3+6xyz=1$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

(3) 若 $xy^2-y\cos z+xe^z=0$, 求 $\frac{\partial y}{\partial z}$。

註 12.11.4. (1) 在隱函數定理中, 求 $y'(a)$ 時, 需要條件 $F_y(a,b)\neq 0$。此條件保證解 $y(x)$ 之存在。此條件即表等値曲線 $F(x,y)=F(a,b)$ 在 (a,b) 附近有非垂直切線。

(2) 在隱函數定理之二中, 令 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 。$F_z(P_0)\neq 0$ 表 $F(x,y,z)$ 在 P_0 的等値曲面在 P_0 之法向 量不爲水平。因此在 P_0 的附近 z 是 x,y 的函數。

(3) 同理, 若 $F_x(P_0)\neq 0$, 則在 P_0 的附近 x 是 y,z 的函數; 若 $F_y(P_0)\neq 0$, 則在 P_0 的附近 y 是 x,z 的函數。

例 12.11.5. 在 $x^2+y^2+z^2=1$ 上那一點的附近 z 可以解成 x,y 的函數, 求在這些點的 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

定義 12.11.6. $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$ 表示 $\begin{cases} x=x(z,w)\\ y=y(z,w),\end{cases}$ $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$ 表示 $\begin{cases} x=x(y,z)\\ w=w(y,z)\end{cases}$。

例 12.11.7. 給定 $F(x,y,z,w)=0$ 及 $G(x,y,z,w)=0$, 其中 F,G 有連續的一階偏導函數, 求 $(\frac{\partial x}{\partial z})_w$。

例 12.11.8. 由方程組 $\begin{cases} u=x^2+xy-y^2\\ v=2xy+y^2\end{cases}$, 定義求在 $(x,y)=(2,-1)$ 的 $(\frac{\partial x}{\partial u})_v$ 及 $(\frac{\partial x}{\partial v})_y$。

定義 12.11.9. (1) 兩函數 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 及 $G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 對 x_1,x_2 的 Jacobian (或 Jacobian 行列式) 定義爲 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2}\\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2}\end{vmatrix}$。

(2) 三函數 F,G 及 H 對 x_1,x_2,x_3 的 Jacobian (或 Jacobian 行列式) 定義爲 $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3}\\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3}\\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_3}\end{vmatrix}$。

定理 12.11.10. (隱函數定理, The Implicit Function Theorem) 考慮方程組

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) & = 0 \\ F_{(2)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) & = 0 \\ \cdots \\ F_{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) & = 0, \end{cases}$$

及一點 $P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 滿足 此方程組。假設任一 $F_{(i)}$ 對所有變數 x_j, x_k 均有連續的一階偏導函數, 又假設 $\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}|_{P_0} \neq 0$, 則存在函數 $\phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\ldots, \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, 且對 $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 附近的 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 均滿足

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)) = 0 \\ F_{(2)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)) = 0 \\ \cdots \\ F_{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_m \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)) = 0, \end{cases}$$

且

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial(F_{(1)}, F_{(2)}, \ldots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n)}}{\frac{\partial(F_{(1)}, F_{(2)}, \ldots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)}}\text{。}$$

例 12.11.11. 證明 $\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$ 在 P_0 的附近 u, v 可以解爲 x, y, z 的函數, 其中 $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$。並求在 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ 的 $\frac{\partial v}{\partial y}$。

例 12.11.12. 若利用方程組 $x = u^2 + y^2$ 及 $y = uv$ 可以由 x, y 解出 u, v。求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$。證明 若分母不爲零, 則 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$。