第 11 章
向量值函數 (Vector-valued Functions)

目錄

11.1 向量值函數 **127**
11.2 運動 **128**
11.3 參數曲線 **129**
11.4 弧長 **129**
11.5 單位切向量與單位法向量 **130**
11.6 曲率 **131**

11.1 向量值函數 (Vector-valued Functions)

向量值函數

定義 11.1.1. (1) 給定一個函數 $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$, 其中 D 爲 $\mathbb{R}$ 上的集合, 則 $\mathbf{r}$ 稱爲向量值函數 (vector valued function)。

(2) 向量值函數可以表爲 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, 其中 f, g, h 稱爲 $\mathbf{r}$ 的分量函數 (component function)。

例 11.1.2. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3-t), \sqrt{t}\rangle$, 求其定義域。

向量值函數之極限與連續性

定義 11.1.3. (1) 令 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ 爲一向量值函數。若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $0 < |t-a| < \delta \Rightarrow |\mathbf{r}(t) - \mathbf{v}| < \epsilon$, 則稱 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t \to a$ 時的極限值爲 $\mathbf{v}$。記爲 $\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}$。

(2) 若 $\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$, 其中 $a \in \operatorname{Dom} \mathbf{r}$, 則稱 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t = a$ 連續。若 $\mathbf{r}$ 在定義域上的每一點均連續, 則稱它爲連續的向量值函數。

定理 11.1.4. (1) 若 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, 且各分量函數的極限存在, 則

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle \text{ 。}$$

(2) $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ 在 $t = a$ 連續的充要條件是 $f(t), g(t), h(t)$ 在 $t = a$ 均連續。

本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」台灣3.0版授權釋出

例 11.1.5. $\mathbf{r}(t) = \left\langle 1+t^3, te^{-t}, \frac{\sin t}{t} \right\rangle$, 求 $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$。

例 11.1.6. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \lfloor t \rfloor \rangle$ 在整數點不連續。

<u>向量值函數的導函數</u>

定義 11.1.7. (1) 給定向量值函數 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$。若 f, g, h 在 $t = a$ 有導數, 則 $\mathbf{r}$ 在 $t = a$ 有導數, 且

$$\mathbf{r}'(a) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(a) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(a+\Delta t) - \mathbf{r}(a)}{\Delta t} \text{ 。}$$

(2) 若 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t = a$ 有導數, 則稱 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t = a$ 可微。若 $\mathbf{r}$ 在定義域 上的每一點均可微, 則稱它是可微函數。

性質 11.1.8. 若 $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ 爲可微的向量值函數, $f(t)$ 爲實值函數, $\mathbf{c}$ 爲常數向量, 則

(1) $\frac{d}{dt}\mathbf{c} = 0$。

(2) $\frac{d}{dt}[c\,\mathbf{u}(t)] = c\,\mathbf{u}'(t)$。

(3) $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$。

(4) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \pm \mathbf{v}'(t)$。

(5) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$。

(6) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$。

(7) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = \mathbf{u}'(f(t)) \cdot f'(t)$。

(8) 若 $\mathbf{r}$ 是可微的向量值函數, 且其長度 $|\mathbf{r}|$ 爲常數, 則 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$。

例 11.1.9. 利用純量三重積導出三階行列式的導函數。

例 11.1.10. 證明 $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \sqrt{3} \rangle$ 與其導函數垂直。

例 11.1.11. 若 $\mathbf{u}$ 三次可微, 試化簡 $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right)$ 。

11.2 運動(Motion)

定義 11.2.1. 若一個物體在空間中沿著一路徑移動, 其位置向量函數爲 $\mathbf{r}(t)$, t 爲時間。

(1) 其速度 (velocity) 爲 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$。

(2) 其速率 (speed) 爲 $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \frac{ds}{dt}$。

(3) 加速度 (acceleration) 爲 $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$。

(4) $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ 爲時間 t 時的運動方向。

(5) 若速度函數連續, 且均不爲零, 則稱其路徑爲平滑 (smooth)。

例 11.2.2. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$ 在原點以外每一點平滑。

例 11.2.3. 求 $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ 在 (1,1,1) 的速度與加速度。

例 11.2.4. 求 $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos\omega t, 4\cos\omega t, 5\sin\omega t \rangle$ 在時間 t 的速度, 速率與加 速度。

例 11.2.5. 一物體以定速率 $v = 5$ 沿著 $y = x^2$ 向右移動, 求它在 $(1, 1)$ 的速度與加速度。

例 11.2.6. (拋射運動 The projectile problem) 一物體在 $t = 0$ 位於 $\mathbf{r}_0$, 以速度 $\mathbf{v}_0$ 射出, 試描述其 運動軌跡。

例 11.2.7. 試證: 一物體以定速率運動的充要條件是它的速度與加速度互相垂直。

11.3 參數曲線 (Curves and parametrizations)

定義 11.3.1. 給定向量值函數 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, 則 $\{(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)), t \in \operatorname{Dom}\mathbf{r}\}$ 形成一空間曲線 (space curve) C, 其中 t 稱爲 C 的參數 (parameter), 且此方程組稱爲曲線 C 的參數化 (parametric equations)。

例 11.3.2. 描述 $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 5 + 2t, -1 + 6t \rangle$ 之圖形。

例 11.3.3. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ 之圖形稱爲 twisted cubic。

例 11.3.4. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ 之圖形稱爲螺旋線 (helix)。

例 11.3.5. 試證以下三者均表同一曲線:

(a) $\mathbf{r}_1(t) = \langle \sin t, \cos t \rangle, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(b) $\mathbf{r}_2(t) = \langle t - 1, \sqrt{2t - t^2} \rangle, \quad t \in [0, 2]$,

(c) $\mathbf{r}_3(t) = \langle t\sqrt{2 - t^2}, 1 - t^2 \rangle, \quad t \in [-1, 1]$ 。

例 11.3.6. 求連接 $P(1, 3, -2), Q(2, -1, 3)$ 之直線參數方程式。

例 11.3.7. 一直線是 $y = 2x - 4$ 與 $z = 3x + 1$ 的交集, 以 $t = y$ 將此直線從 $(2, 0, 7)$ 到 $(3, 2, 10)$ 的部份參數化 。

例 11.3.8. $x + y = 1$ 與 $z = x^2 + y^2$ 相交成拋物線, 以 $t = x$ 將全曲線參數化。以 $t = y$ 或 $t = z$ 爲參數是否可行?

例 11.3.9. 將 $x + 2y + 4z = 4$ 與 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的相交曲線參數化 。

例 11.3.10. 將 $x^2 + y + z = 2$ 與 $xy + z = 1$ 的相交曲線參數化 。

11.4 弧長 (Arc Length)

定義 11.4.1. (1) 一個平滑曲線 $C : \mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle, t \in [a, b]$, 且當 t 從 a 到 b 時, 其軌跡恰跑遍一次, 則其弧長爲

$$\begin{aligned} L = \int_C ds &= \int_C \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_a^b |\mathbf{v}(t)| dt. \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$。

(2) 若 $\mathbf{r}'(t)$ 爲連續, 且當 t 從 a 到 b, C 恰好跑一次。選取一個基點$P(t_0)$, 則對任意 t, 其有向距離爲 $s(t)=\int_{t_0}^{t}|\mathbf{v}(\tau)|d\tau$。$s(t)$ 稱爲弧長函數 (arc length function) 。

(3) 給定一數 l, 可以唯一決定曲線 C 上的一點 Q, 使得 $s(Q)=l$, 故 s 稱爲 C 的弧長參數 (arc length parameter)。

例 11.4.2. 求 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle$ 上從 $(1,0,0)$ 到 $(1,0,2\pi)$ 之弧長。

例 11.4.3. 令 $\mathbf{r}(t)=\langle a\cos t,a\sin t,bt\rangle$。求從 $(a,0,0)$ 到 $(a,0,2\pi b)$ 的弧長, 若以 $(a,0,0)$ 爲基點之弧長爲參數, 將全曲線參數化。

11.5 單位切向量與單位法向量 (Unit Tangent and Unit Normal)

切向量

定義 11.5.1. (1) 給定向量值函數 $\mathbf{r}(t)$, 若 $\mathbf{r}'(a)\neq\mathbf{0}$, 則稱爲它爲曲線在 $P=\mathbf{r}(a)$ 的切向量。而通過 P 點且與 $\mathbf{r}'(a)$ 平行的直線則稱爲切線。

(2) 單位切向量 (unit tangent vector) 爲 $\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$。

(3) 一參數曲線 $\mathbf{r}(t)$ 若滿足 $\mathbf{r}'(t)$ 爲連續, 且 $|\mathbf{r}'(t)|\neq 0,\forall t\in I$, 則稱它在 I 上爲平滑 (smooth)。

(4) 一曲線若在定義域範圍內均爲平滑, 則稱爲平滑曲線 (smooth curve)。

(5) 一曲線若爲有限個平滑曲線連接在一起, 則稱爲逐段平滑 (piecewise smooth)。

例 11.5.2. $\mathbf{r}(t)=\left\langle\sqrt{t},2-t\right\rangle$, 求 $\mathbf{r}'(t)$, 並畫出 $\mathbf{r}(1)$ 及 $\mathbf{r}'(1)$。

例 11.5.3. 曲線之參數式爲 $x=2\cos t,y=\sin t,z=t$, 求在點 $\left(0,1,\frac{\pi}{2}\right)$ 之切線的參數式。

例 11.5.4. $\mathbf{r}(t)=\langle 1+t^3,te^{-t},\sin 2t\rangle$,

(a) 求其導函數。

(b) 求在 $t=0$ 的單位切向量。

法向量

定義 11.5.5. (1) 若 $\mathbf{r}(t)$ 爲平滑的空間曲線, 定義單位主法向量 (principal unit normal vector) 爲 $\mathbf{N}(t)=\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}=\frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{|\frac{d\mathbf{T}}{dt}|}$, 簡稱單位法向量。

(2) $\mathbf{N}$ 及 $\mathbf{T}$ 所生成的平面稱爲 osculating plane。

例 11.5.6. 令 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos 2t,\sin 2t\rangle$, 求 $\mathbf{T}$ 及 $\mathbf{N}$。

例 11.5.7. 求螺旋線 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle$ 之單位法向量。

11.6 曲率 (Curvature)

曲率

定義 11.6.1. 令 $\mathbf{T}$ 是平滑曲線 C 的單位切向量，則 C 的曲率函數 (curvature) 爲 $\kappa = |\frac{d\mathbf{T}}{ds}|$。

定理 11.6.2. (1) 令 $\mathbf{r}(t)$ 爲一平滑曲線，則 $\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\frac{d\mathbf{T}}{dt}|$

(2) 若平面曲線爲 $y = f(x)$, 則 $\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1+f'(x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$。

(3) 若 $\mathbf{r} = \langle x(t), y(t)\rangle$，則 $\kappa(x) = \frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{((\dot{x})^2+(\dot{y})^2)^{\frac{3}{2}}}$。

(4) 若曲線爲 $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$, 則 $\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}"(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$。

例 11.6.3. 令 $\mathbf{r}(t)$ 爲平滑曲線, 則在 $\kappa \neq 0$ 的點, $\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}/|\frac{d\mathbf{T}}{ds}|$。

定理 11.6.4. 令 $\Delta\theta$ 爲 $\mathbf{T}(s+\Delta s)$ 與 $\mathbf{T}(s)$ 之間的夾角, 則

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| 。$$

例 11.6.5. 一直線的曲率爲 0。

例 11.6.6. 一個半徑爲 a 之圓的曲率爲 $\frac{1}{a}$。

例 11.6.7. 令 $a > 0$, 證明曲線 $\mathbf{r} = \langle a\cos(\frac{s}{a}), a\sin(\frac{s}{a})\rangle$ 是以弧長爲參數, 求曲率, 曲率半徑, 切向量與主法向量。

例 11.6.8. $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, a\sin t, bt\rangle, a, b \geq 0, a^2+b^2 \neq 0$，求曲率 κ 及單位主法向量 $\mathbf{N}$。

例 11.6.9. 求 $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ 之曲率函數, 及它在原點的曲率。

曲率圓

定義 11.6.10. 令 $\mathbf{r}(t)$ 爲一平滑曲線，P 爲曲線上一點, 設 $\kappa \neq 0$, 則在 P 點的曲率圓 (circle of curvature or osculating circle) 爲 osculating plane 上的圓，滿足下列條件

(i) 在 P 點與曲線相切，

(ii) 與曲線在 P 點有相同的曲率，即半徑爲 $\rho = \frac{1}{\kappa}$,

(iii) 位於曲線凹側 (concave side, 即 $\mathbf{N}$ 所指向)。

圓的半徑稱爲曲線在 P 點的曲率半徑 (radius of curvature), 記爲 $\rho(=\frac{1}{\kappa})$, 圓心稱爲曲率中心 (center of curvature)。

[註] Osculating circle 是 C 在 P 點最接近的圓。

例 11.6.11. 求 $y = x^2$ 的曲率函數及在原點及點 $(1,1), (2,4)$ 的 osculating circle。