第 10 章

向量

目錄

10.1 向量積 **121**
10.2 柱面及二次曲面 **123**
10.3 柱面座標與球面座標 **125**
10.4 拓樸 **126**

10.1　向量積 (Vector Product)

定義 10.1.1. 若向量 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, 則 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的外積 (或叉積 cross product、向量積 vector product) 爲

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle.$$

註 10.1.2. (1) 若向量 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, 則 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的內積 (inner product, 或點積 dot product、純量積 scalar product) 爲

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

(2) $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$, $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ 分別爲在 x、y、z-軸上的單位向量, 且具有下列性質:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

例 10.1.3. $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 7, -5\rangle$, 求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$。

性質 10.1.4. (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$。

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 與 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 垂直。

(3) 若 θ 是 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之間的夾角 $(0 \le \theta \le \pi)$, 則 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$。

(4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的長度是 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 所張成之平行四邊形的面積。

(5) 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 則 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 平行的充要條件爲 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$。

(6) 令 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 為空間中的非零向量, 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不平行, 則 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 決定一平面 E, 且該平面的單位法向量 $\mathbf{n}$ 可令為

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta},$$

而 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 或 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$ 的方向會滿足右 手定則 (right-hand rule)。

若 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 平行 , 則 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$; 若 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 中有一為零 , 則 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 。

例 10.1.5. (a) 令 E 為經過 $P(1, 4, 6)$、$Q(-2, -5, -1)$、$R(1, -1, 1)$ 的平面, 求一向量垂直於 E。

(b) 求以 P, Q, R 為頂點之三角形面積。

性質 10.1.6. 令 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, c \in R.$

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$。

(2) $(c\,\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\,\mathbf{b})$。

(3) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$。

(4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$。

(5) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$。

(6) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$。

註 10.1.7. (1) 外積沒有交換律。

(2) 外積沒有結合律, 即 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ 及 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 不見得相等。

定義 10.1.8. (1) 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 之純量三重積 (sclar triple product) 定義為

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 稱為 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的向量三重積 (vector triple product)。

性質 10.1.9. 純量三重積的絕對值 $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ 是 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 所張之平行六面體的體積。

例 10.1.10. 求 $\mathbf{a} = \langle 1, 2, -1\rangle, \mathbf{b} = \langle -2, 0, 3\rangle$ 及 $\mathbf{c} = \langle 0, 7, -4\rangle$ 所張之平行六面體的體積。

例 10.1.11. 證明 $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, -1, 4\rangle, \mathbf{c} = \langle 0, -9, 18\rangle$ 為共平面 (coplanar)。

定義 10.1.12. 以力 $\mathbf{F}$ 作用於一物體上, 且由支點到施力點的向量為 $\mathbf{r}$, 則物體對該支點所受的力矩 (轉矩, torque) 定義為 $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, 其大小為 $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \sin\theta$。

例 10.1.13. 如圖, 以 0.25m 長的扳手旋轉螺絲, 作用力為 40N, 夾角為 $\theta = 75°$, 求螺絲受到的力矩大小。

10.2 柱面及二次曲面 (Cylinders and Quadratic surfaces)

例 10.2.1. 討論下列空間方程式之圖形:

(1) $z = 0$,

(2) $x = y$,

(3) $x + y + z = 1$,

(4) $x = y + z = 0$,

(5) $x^2 + y^2 = 0$,

(6) $z = x^2$,

(7) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$,

(8) $y^2 + (z-1)^2 = 4$,

(9) $y^2 + (z-1)^2 = 0$,

(10) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$,

(11) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$,

(12) $z > 0$,

(13) $x^2 + y^2 \geq 4$,

(14) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$,

(15) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2x = 0, \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \text{ 。} \end{cases}$

柱面

定義 10.2.2. (1) 給一空間中的曲面 S。任一與座標面平行的平面與 S 的交集, 稱爲該曲面的截面 (trace or cross-section)。

(2) 在空間中有一平面曲線 C, 稱爲母線 (generating curve)。另外有一不在該平面上的直線 L, 稱爲 ruling。將此直線 沿著 C 平行移動所得到的曲面稱爲柱面 (cylinder)。

例 10.2.3. 在 xz-平面上有一曲線 $C : g(x, z) = c$, 取平行於 y-軸之直線沿著 C 移動所得之柱體 , 方程式爲 $g(x, z) = c$。

例 10.2.4. 將平行於 z-軸之直線, 沿著拋物線 $y = x^2, z = 0$ 移動 , 所得之柱體之方程式爲何?

例 10.2.5. 以下均爲柱面:
(1) $z = x^2$。
(2) $x^2 + y^2 = 1$。
(3) $y^2 + z^2 = 1$。

旋轉面

例 10.2.6. 在 xy-平面上有一曲線 $f(x,y)=0$, 將其繞 x-軸旋轉後, 所得旋轉面的方程式爲 $f(x,\sqrt{y^2+z^2})=0$。

例 10.2.7. 將 $y=x^2(x\geq 0)$ 繞 x-軸旋轉所得之旋轉面方程式爲何?

二次曲面

定義 10.2.8. 二次方程式爲 $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0$ 之圖形稱爲二次曲面 (quadric surface)。

註 10.2.9. (1) 經過適當的旋轉與平移, 二次曲面必可轉換成以下兩種標準型:

(a) $Ax^2+By^2+Cz^2+d=0$, $d=0$ 或 1,

(b) $Ax^2+By^2+z=0$。

(2) 其標準型有以下各類:

(a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 爲橢球面(Ellipsoid)。

  (i) 若 $a=b$, 這是橢圓的旋轉面 。

  (ii) 若 $a=b=c$, 這是球面。

(b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 爲單葉雙曲面 (Hyperboloid of one sheet)。

(c) $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 爲雙葉雙曲面 (Hyperboloid of two sheets)。

(d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ 爲錐面 (Cone)。若 $a=b$, 則爲正圓錐。

(e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ 爲橢圓拋物面 (Elliptic paraboloid)。

(f) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ 爲雙曲拋物面 (Hyperbolic paraboloid), 又稱鞍面 (saddle), 原點稱爲鞍點 (saddle point)。

例 10.2.10. 試判斷以下爲何種曲面?

(1) $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$。

(2) $z=y^2-x^2$。

(3) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{4}=1$。

(4) $4x^2-y^2+2z^2+4=0$ 。

(5) $x^2+2z^2-6x-y+10=0$。

10.3 柱面座標與球面座標 (Cylindrical and Spherical Coordinates)

柱面座標

定義 10.3.1. 空間中任一點 P 的柱面座標(cylindrical coordinate system) 爲 $[r,\theta,z]$, 其中:

(1) $[r,\theta]$ 爲 P 在 xy-平面之投影 (x,y) 的極座標, 且令 $r\geq 0, 0\leq\theta<2\pi$。

(2) z 即爲直角座標之 z。

註 10.3.2. (1) P 的直角座標 (x,y,z) 與其柱面座標 $[r,\theta,z]$ 的關係爲

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

以及

$$r^2=x^2+y^2,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}.$$

(2) 在柱面座標中, $r=c$ 爲以 z-軸爲軸, 半徑爲 c 之圓柱面; $\theta=c$ 爲包含 z 軸之半平面; $z=c$ 爲垂直於 z 軸之平面。

例 10.3.3. (1) 繪出柱面座標 $\left[2,\frac{2\pi}{3},1\right],[4,-\frac{\pi}{3},5]$ 表示之點, 並求其直角座標。

(2) 將直角座標 $(3,-3,7),(0,2,-3)$ 轉換爲柱面座標。

例 10.3.4. 描述柱面座標方程式 $z=r$, $z=r\cos\theta$, $r=2\cos\theta$ 所定義之曲面圖形。

例 10.3.5. 描述柱面座標方程式 $\begin{cases} r=z \\ z=1+r\cos\theta, \end{cases}$ $\begin{cases} \theta=\frac{\pi}{2} \\ r^2+z^2=4 \end{cases}$ 所定義之曲線圖形。

球面座標

定義 10.3.6. 空間中任一點 P 之球面座標(spherical coordinate) 爲 $[\rho,\phi,\theta]$, 其中:

(1) ρ 爲 P 到原點的距離,

(2) ϕ 爲 $\overrightarrow{OP}$ 與正 z-軸的夾角 $(0\leq\phi<\pi)$,

(3) θ 爲柱面座標的 θ $(0\leq\theta<2\pi)$。

註 10.3.7. (1) 柱面座標中的 $r=\rho\sin\theta$, 而 P 的直角座標 (x,y,z) 與其球面座標 $[\rho,\phi,\theta]$ 的關係爲

$$\begin{cases} x=r\cos\theta=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=r\sin\theta=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$$

以及

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2=r^2+z^2.$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin\phi \\ \tan\phi=\frac{r}{z}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases}$$

(2) 在球面座標中, $\rho = c$ 爲一半徑 c 的球面; $\phi = c$ 爲一半錐面; $\theta = c$ 爲一半平面。

例 10.3.8. (1) 畫出球面座標爲 $\left[2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$之點, 並求其直角座標。

(2) 一點之直角座標爲 $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$, $(1, 1, \sqrt{2})$, 求其球面座標。

例 10.3.9. 求球 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 之球面座標方程式。

例 10.3.10. 求錐面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 之球面座標方程式。

10.4 拓樸 (Topology)

定義 10.4.1. (1) 一點 $P \in \mathbb{R}^n$ 的鄰域 (neighbourhood) 是集合 $B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : d(P,Q) < r\}$ 。當 $n = 1$, $B_r(P)$ 爲開區間 (open interval); 當 $n = 2$, $B_r(P)$ 爲開盤 (open disk); 當 $n = 3$, $B_r(P)$ 爲開球 (open ball)。

(2) 若一集合 S 其上每一點均有一鄰域包含在 S 中, 則稱 S 爲開集 (open set)。

(3) S 的餘集 (complement) S^c 是所有不屬於 S 之點所成之集合。

(4) 若餘集 S^c 爲開集, 則稱 S 爲閉集 (closed set)。

(5) 點 P 稱爲的邊界點 (boundary point), 若 P 的每一個鄰域中均有 S 及 S^c 之點。

(6) 點 P 稱爲的內點 (interior point), 若 $P \in S$, 但不是 S 的邊界點。

(7) 點 P 稱爲的外點 (exterior point), 若 $P \in S^c$, 但不是 S 的邊界點。

(8) S 的邊界 $\operatorname{bdry}(S)$ 是S 的邊界點所成的集合; S 的內部 $\operatorname{int}(S)$ 是S 的內點所成的集合; S 的外部 $\operatorname{ext}(S)$ 是 S 的外點所成的集合。