第 1 章

極限 (Limits)

目錄

(i) 介紹極限的直觀意義

(ii) 介紹各種極限的定義及一些計算技巧

(iii) 函數的連續性及極值定理, 中間值定理

1.1 變化率(Rate of Changes)

定義 1.1.1. $y = f(x)$ 在 $x \in [x_1, x_2]$ 上的平均變化率(average rate of change) 爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x)}{h}, h = x_2 - x_1 \text{ 。}$$

例 1.1.2. 一顆球從 450 公尺高的 CN 塔上放下。

(1) 求它在前兩秒的平均速度。

(2) 求它在第 1 秒到第 2 秒間的平均速度。

(3) 求它在第二秒的“速度”。

例 1.1.3. 就附圖估計在 60 天時的變化率。

例 1.1.4. 作圓的內接正多邊形以估計圓的面積。

本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」台灣3.0版授權釋出

1.2 極限的直觀

例 1.2.1. 討論 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x = 1$ 附近的行爲。

定義 1.2.2. (直觀) 假設 $f(x)$ 在 a 的附近 (a 可能除外) 均有定義。$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ 表示: 當 x 很靠近 a 時 (但不等於 a), $f(x)$ 很靠近 L, 而且要有多接近, 就有多接近。我們稱它爲 $f(x)$ 在 $x = a$ 的 極限 (limit) 是 L 。

例 1.2.3. 求 $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x+4}{x+5}$ 。

例 1.2.4. 求以下三函數在 $x = 1$ 的極限:

a $f(x) = \frac{(x^2-1)}{x-1}$,

b $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{if } x \neq 1 \\ 1 & \text{if } x = 1, \end{cases}$

c $h(x) = x + 1$ 。

例 1.2.5. 考慮下三函數在 $x = 0$ 的極限:

(1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x \geq 0, \end{cases}$

(2) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$

(3) $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0, \\ \sin\frac{1}{x} & \text{if } x > 0 \text{ 。} \end{cases}$

例 1.2.6. 推測 $g(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ 在趨近於 0 的極限值。

1.3 極限的性質

<u>四則運算的極限</u>

定理 1.3.1. 若 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ 且 $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$, 則

(1) $\lim\limits_{x\to c} a = a$, $\lim\limits_{x\to c} x = c$,

(2) $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = kL$,

(3) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$,

(4) $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = L \cdot M$,

(5) $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, 若 $M \neq 0$,

(6) $\lim\limits_{x\to c} f(x)^\alpha = L^\alpha, \alpha \in \mathbb{Q}, L > 0$ 。

例 1.3.2.

(1) 若 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 爲多項式, 則 $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$ 。

(2) 若 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 爲有理式, 且 $q(c) \neq 0$, 則 $\lim\limits_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$ 。

例 1.3.3. 求 $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}}$ 。

例 1.3.4. 求 $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ 。

例 1.3.5. 求 $\lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$ 。

例 1.3.6. 求 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$ 。

例 1.3.7. 求 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\{\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\}$ 。

例 1.3.8. 求 $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ 。

例 1.3.9. 求 $\lim\limits_{x\to 27} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-2}{x-27}$ 。

例 1.3.10. 求 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{5-x-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}$ 。

<u>三明治定理</u>

定理 1.3.11.

(1) 令 $c \in (a,b)$ 。若 $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b], x \neq c$, 且以下極限均存在, 則 $\lim\limits_{x\to c} f(x) \le \lim\limits_{x\to c} g(x)$ 。

(Squeeze Theorem) 若 $g(x) \le f(x) \le h(x), \forall x \in [a,b], x \neq c$, 且 $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$, 則 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ 。

[註] 在 (1) 中, 若 $f(x) < g(x), \forall x \in [a,b], x \neq c$, 仍可能 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x)$ 。

定理 1.3.12. 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 附近爲有界, 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, 則 $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = 0$ 。

例 1.3.13. 若 $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0$, 則 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ 。

例 1.3.14. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$ 是否成立?

例 1.3.15. 若 $1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2}, \forall x \neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$ 。

例 1.3.16. 求 $\lim\limits_{\theta\to 0} \sin\theta$ 。

例 1.3.17. 求 $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta$ 。

1.4 單側, 在無限遠之極限及無窮極限

(一) 單側極限 (One-Sided Limits)

例 1.4.1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}|x|$。

例 1.4.2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 。

例 1.4.3. 令 $f(x)=\frac{|x-2|}{x^2+x-6}$ 。求 $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 。

例 1.4.4. 令 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, 求 $\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 。

例 1.4.5. 求 $\lim\limits_{x\to 3+}\lfloor x\rfloor$, $\lim\limits_{x\to 3-}\lfloor x\rfloor$, $\lim\limits_{x\to \pi}\lfloor x\rfloor$ 。

定理 1.4.6. $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c^+}f(x)=L$ 且 $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=L$ 。

例 1.4.7. $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4} & \text{if } x>4;\\ 8-2x & \text{if } x<4.\end{cases}$ 。求 $\lim\limits_{x\to 4}g(x)$ 。

例 1.4.8. 求 $\lim\limits_{x\to n}\lfloor x-\lfloor x-1\rfloor\rfloor$, $n\in\mathbb{Z}$ 。

例 1.4.9.

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 2^-}\lfloor x+\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$ 。

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 2^+}\lfloor x+\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$ 。

(二) 在無限遠的極限(Limits at infinite)

例 1.4.10. 求

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$,

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}$ 。

定理 1.4.11. 若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=L$, 且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=M$, 則

(1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)\pm g(x)=L\pm M$,

(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)g(x)=LM$,

(3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$ 若$M\neq 0$,

(4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}kf(x)=kL$,

(5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)^\alpha=L^\alpha$ 若$\alpha\in\mathbb{Q}$ 且$L>0$ 。

例 1.4.12. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ 。

例 1.4.13. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x+1}{2x^3-1}, \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{11x+1}{2x^3-1}$ 。

例 1.4.14. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-x-2}{5x^2+4x+1}, \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4-x-2}{5x^2+4x+1}$ 。

例 1.4.15. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x-2}{5x^2+4x+1}, \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^3-x-2}{5x^2+4x+1}$ 。

註 1.4.16. 綜合以上例題可結論:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m \text{ 且 } n-m \text{ 為偶數}\\ -\infty & n>m \text{ 且 } n-m \text{ 為奇數 。}\end{cases}$$

例 1.4.17. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[146]{|x|}}{\sqrt[7]{10^7+\sqrt[3]{10^3+\sqrt[7]{x+10^7}}}}$ 。

例 1.4.18. 求

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$,

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ 。

例 1.4.19. 描繪函數 $y=(x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ 的圖形。

(三) **無窮極限**(Infinite Limits)

例 1.4.20. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}$ 。

例 1.4.21. 求

(a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}$ 。

例 1.4.22. 求 $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2x}{x-3}, \lim\limits_{x\to3^+}\frac{2x}{x-3}$ 。

例 1.4.23. 求以下各極限:

(a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$,

(b) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x-2}{x^2-4}$,

(c) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x-3}{x^2-4}$,

(d) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x-3}{x^2-4}$,

(e) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x-1}{x^2-4}$,

(f) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2-x}{(x-2)^3}$ 。

1.5 三角函數的極限

定理 1.5.1. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ (θ 取弳度) 。

例 1.5.2. 求 $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{3\theta}$ 。

例 1.5.3. 求 $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta-1)}{\theta-1}$ 。

例 1.5.4. 求 $\lim\limits_{\theta\to 1}\frac{\sin(\theta-1)}{\theta-1}$ 。

例 1.5.5. 求 $\lim\limits_{\theta\to 1}\frac{\sin(\theta-1)^2}{\theta-1}$ 。

例 1.5.6. 求 $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}$ 。

例 1.5.7. 求 $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta^2}$ 。

例 1.5.8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$ 。

例 1.5.9. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 。

例 1.5.10. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$ 。

例 1.5.11. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ 。

例 1.5.12. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 。

例 1.5.13. 求 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的極限 。

例 1.5.14. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ 。

例 1.5.15. 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$ 。

例 1.5.16. 求 $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta-\tan\theta}{\theta-\frac{\pi}{2}}$ 。

1.6 極限之綜合例題

例 1.6.1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ 。

例 1.6.2. 求 $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ 。

例 1.6.3. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}})$ 。

例 1.6.4. 令 $f(x)=\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$, 求

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$,

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$,

(f) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ 。

例 1.6.5. 令 $f(x)=\frac{\lfloor x\rfloor-x}{\lfloor x\rfloor-x^3}$ 。
求 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 。

例 1.6.6. 令 $f(x)=x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$ 。
求 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ 。

例 1.6.7. 令 $f(x)=\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x+4}$ 。
求 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 。

例 1.6.8. 令 $f(x)=\frac{\lfloor x\rfloor-2}{\lfloor x^2\rfloor-4}$ 。
求 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ 。

例 1.6.9. 令 $f(x)=\frac{\lfloor x^2\rfloor-\lfloor x\rfloor^2}{x^2-1}$ 。
求 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ 。

例 1.6.10. 求以下極限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}|x|\lfloor x\rfloor$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\lfloor x\rfloor\sin x$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor x$,

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor x^2$,

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2-\lfloor x\rfloor}{3x+4}$,

(6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{3x+2}$ 。

1.7 極限的定義(Definitions of Limit)

定義 1.7.1. 假設 $f(x)$ 在包含 a 的某一開區間上有定義。若 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ 使得 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$, 則稱 $f(x)$在 x 趨近於 a 時的極限 (limit) 爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ 。

[註]

(1) 定義中的 δ 不爲唯一。若對某一 δ 成立, 則對任意 $\delta' < \delta$ 均成立。

(2) 當 $f(x)$ 在 $x = a$ 有極限, 則極限值爲唯一。因此 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ 是妥善定義的 (well-defined)。

例 1.7.2. 證明 $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5) = 7$ 。

例 1.7.3. 證明 $\lim\limits_{x\to 5}(7x-8) = 27$ 。

例 1.7.4. 證明 $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ 。

例 1.7.5. 證明 $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ 。

例 1.7.6. 證明 $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1} = 2$ 。

定義 1.7.7.

(1) 若 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ 使得 $a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$, 我們稱 $f(x)$ 在 a 的右極限爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c$ 。

(2) 若 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ 使得 $a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$, 我們稱 $f(x)$ 在 x_0 的左極限爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c$ 。

定義 1.7.8.

(1) $\forall\varepsilon > 0, \exists M$ 使得 $x > M \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$, 則稱 x 趨近 ∞ 時, $f(x)$ 的極限爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ 。

(2) $\forall\varepsilon > 0, \exists M$ 使得 $x < M \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$, 則稱 x 趨近 $-\infty$ 時, $f(x)$ 的極限爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ 。

例 1.7.9. 證明

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$,

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

定義 1.7.10.

(a) 若 $\forall B > 0$, 則 $\exists\,\delta > 0$, 使得 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > B$, 則稱在 x 趨近 a 時, $f(x)$ 的極限值爲無限大, 記爲 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 。

(b) 若 $\forall B < 0$, 則 $\exists\,\delta > 0$, 使得 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < B$, 則稱在 x 趨近 a 時, $f(x)$ 的極限值爲負無限大, 記爲 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ 。

例 1.7.11. 證明 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ 。

1.8 連續性(continuity)

<u>定義</u>

例 1.8.1. $y = f(x)$ 如圖 。根據此圖討論 $y = f(x)$ 在哪些點連續?

定義 1.8.2.

(1) $y = f(x)$ 若滿足 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, 則稱 $f(x)$ 在點 c 連續。

(2) 若滿足 $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c)$, 則稱 $f(x)$ 在點 c 爲右連續。

(3) 若滿足 $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c)$, 則稱 $f(x)$ 在點 c 爲左連續。

註 1.8.3.

(1) $f(x)$ 在 $x = c$ 連續, 若且唯若其滿足以下三條件:

(i) $f(c)$ 有定義。

(ii) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 存在。

(iii) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ 。

(2) $f(x)$ 在 $x = c$ 連續, 若且唯若 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(\lim\limits_{x\to c} x)$ 。

(3) “連續”是局部性概念。

註 1.8.4. 不連續有以下幾類:

(1) 可除性不連續 (removable discontinuity), 可適當重新定義 $f(x)$ 在不連續之值以去除此點之 不連續性,

(2) 跳動性不連續 (jump discontinuity),

(3) 無限不連續 (infinite discontinuity),

(4) 振盪不連續 (oscilating discontinuity)。

定義 1.8.5.

(1) 若 a 爲一區間的右端點, 且 $f(x)$ 在點 a 爲左連續, 則稱 $f(x)$ 在邊界點 $x = a$ 連續。

(2) 若 a 爲一區間左端點, 且 $f(x)$ 在點 a 爲右連續, 則稱 $f(x)$ 在邊界點 $x = a$ 連續。

(3) 若 $f(x)$ 在一區間 I 在每一點連續, 則稱它在 I 上連續。

(4) 若 $f(x)$ 在其定義域上每一點連續, 則稱其爲連續函數。

例 1.8.6. 討論以下函數的連續性:

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$,

(2) $f(x) = x$,

(3) 常數函數 $f(x)$ 。

例 1.8.7. 以下函數在哪些點不連續?

(1) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$,

(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{if } x\neq 0\\ 1 & \text{if } x=0,\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x\neq 2\\ 1 & \text{if } x=2\end{cases}$ 。

例 1.8.8. 討論 $f(x)=\lfloor x\rfloor$ 之連續性。

五則運算的連續性

定理 1.8.9. 若 f 及 g 在 $x=c$ 連續, 則 $f+g, f-g, f\cdot g, kf, f^\alpha, \frac{f}{g}$ (若 $g(c)\neq 0$) 均在 $x=c$ 連續。

定理 1.8.10.

(1) 若 $g(x)$ 在 $x=L$ 連續且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$, 則 $\lim\limits_{x\to c} g(f(x))=g(\lim\limits_{x\to c} f(x))=g(L)$ 。

(2) 若 f 在 $x=c$ 且 g 在 $f(c)$ 連續, 則 $g\circ f$ 在 $x=c$ 連續。

例 1.8.11. 若 f 及 g 均在 $x=0$ 連續, 則 $g\circ f$ 是否在 $x=0$ 連續?

例 1.8.12.

(1) 多項式函數, 有理函數均爲連續函數。

(2) 冪次函數 $x^{\frac{m}{n}}$ 均爲連續函數。

(3) $f(x)=|x|$ 爲連續函數。

(4) $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ 均爲連續函數。

(5) $f(x)=\frac{\ln x+\tan^{-1}x}{x^2-1}$, $g(x)=\sin(x^2)$, $h(x)=\ln(1+\cos x)$均爲連續函數。

例 1.8.13. 證明 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 連續。

例題

例 1.8.14. 令 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, 則 $f(x)$ 在每一點都不連續。

[註]

(1) $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續, 即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ 。要證明函數在 $x=a$ 處連續, 相當於證明:

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0, \text{使得 } 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\epsilon \text{ 。}$$

(2) 要證明函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處不連續, 相當於證明:$\exists\epsilon>0$, 使得 $\forall\delta>0$, 下列敘述不成立

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\epsilon$$

。

例 1.8.15. 令 $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & \text{if } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$, $f(x)$ 在哪些點連續?

例 1.8.16. 若 $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{if } x<a \\ x^2 & \text{if } x\geq a, \end{cases}$, 求 a 使其連續。

例 1.8.17. (Dirichlet Ruler 函數) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n} \text{ if} & x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q},(m,n)=1,n>0 \\ 0 \text{ if} & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$, 則:

(1) $f(x)$ 在有理點上不連續。

(2) $f(x)$ 在無理點上連續。

連續擴張

定義 1.8.18. 若 $f(x)$ 在 $x=c$ 有可除性不連續, 且 $f(c)$ 沒有定義, 則可以定義

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{if } x\in \operatorname{Dom} f \\ \lim\limits_{x\to c} f(x) & \text{if } x=c, \end{cases}$$

$F(x)$ 稱為 $f(x)$ 的連續擴張 (continuous extension)。

例 1.8.19. 求 $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ 的連續擴張。

例 1.8.20. 求 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的連續擴張。

1.9 極值定理, 中間值定理 (The Max-Min Theorem, Intermediate Value Theorem)

定理 1.9.1. (極值定理 Extreme Value Theorem, Weierstrass 定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 則
(a) $f(x)$ 必有界。
(b) $f(x)$ 必存在極大及極小值。

例 1.9.2. 以 200 公尺圍籬如何圍出最大面積的矩形場地?

例 1.9.3. 以圖解求 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}, -5\leq x\leq 5$, 的極大值。

定理 1.9.4. (中間值定理) 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 則對 $f(a)$ 及 $f(b)$ 間每一數均可取值。即對任意介於 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之間的 d, 皆存在 $c\in[a,b]$, 使得 $f(c)=d$。

推論 1.9.5. (勘根定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 且 $f(a)$ 及 $f(b)$ 異號, 則存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$。

[註]
(1) 對不連續函數, 中間值定理不見得成立。
例: $f(x)=\begin{cases} x+2 & -1<x\le 1 \\ x & -2\le x\le -1, \end{cases}$
$f(-2)<0$, $f(1)>0$, 但 $f(x)=0$ 無解。

(2) 中間值定理只保證根的存在, 根的數目甚至可能有無限多。
例: $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0, \end{cases}$
在 $[-\frac{2}{3\pi},\frac{2}{\pi}]$ 上有無限多個 x, 滿足 $f(x)=0$ 。

例 1.9.6. 求 $f(x)=x^3-4x$ 的正負區間。

例 1.9.7. 證明方程式 $x^3-x-1=0$ 在區間 $(1,2)$ 內有解。

例 1.9.8. 利用二分法 (the bisection method) 求方程式 $x^3-x-1=0$ 的根。

註 1.9.9. *存在性定理* (Existence Theorem) 的重要性。
例: 求最大的正整數爲何?
令 N 爲最大的正整數。則 $N^2\ge N$。因 N 爲最大的, 故 $N=N^2\Rightarrow N=0,1$。但 $N=0$不合, 所以 $N=1$ 爲最大的正整數。

例 1.9.10. 奇數多項式方程式必有實根。

例 1.9.11. 證明曲線 $y=x^3$ 與 $y=3x+1$ 必相交。

例 1.9.12. 在地球的赤道上, 必有一對對徑點 (antipodal), 其氣溫相等。

例 1.9.13. 有一四腿等長之圓桌放在地面上, 此地面高低不平, 但爲連續性起伏。證明: 將此圓桌順時針 (或逆時針) 至多轉 90°, 必可使桌子平穩。