

邏輯作業(Unit 7)

解答

系級：_____

姓名：_____

學號：_____

日期：_____

A. 請以公理法系統證明：(公理與推論規則請參閱講義內容)

1. $\vdash \neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$

- (1) $\neg P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (A1)
- (2) $(\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (A3)
- (3) $((\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg P \rightarrow ((\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q)))$ (A1)
- (4) $\neg P \rightarrow ((\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q))$ (2),(3),MP
- (5) $(\neg P \rightarrow ((\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow ((\neg P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) \rightarrow (\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)))$ (A2)
- (6) $(\neg P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) \rightarrow (\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q))$ (4),(5),MP
- (7) $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (1),(6),MP

2. $\neg\neg P \vdash P$

- (1) $\neg\neg P$ Assumption
- (2) $\neg\neg P \rightarrow (\neg\neg\neg\neg P \rightarrow \neg\neg P)$ (A1)
- (3) $\neg\neg\neg\neg P \rightarrow \neg\neg P$ (1),(2),MP
- (4) $(\neg\neg\neg\neg P \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg\neg\neg\neg P)$ (A3)
- (5) $\neg P \rightarrow \neg\neg\neg\neg P$ (3),(4),MP
- (6) $(\neg P \rightarrow \neg\neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg\neg P \rightarrow P)$ (A3)

$$(7) \quad \neg\neg P \rightarrow P$$

(5),(6),MP

$$(8) \quad P$$

(1),(7),MP

B. 請以樹狀自然演繹法系統證明：(推論規則請參閱講義內容)

$$1. \vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P \leftrightarrow \neg P^{(1)}}{P \leftrightarrow \neg P} (\leftrightarrow E)}{P \rightarrow \neg P} (\rightarrow E)}{\neg P} (\neg E) \\
 \frac{\perp}{\neg P} (\neg I) \quad (2) \\
 \hline
 \perp \\
 \frac{\perp}{\neg(P \leftrightarrow \neg P)} (\neg I)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P \leftrightarrow \neg P^{(1)}}{P \leftrightarrow \neg P} (\leftrightarrow E)}{\neg P \rightarrow P} (\rightarrow E)}{P} (\neg E) \\
 \frac{\perp}{P} (RAA) \quad (3) \\
 \hline
 \perp \\
 \frac{\perp}{\neg(P \leftrightarrow \neg P)} (\neg I)
 \end{array}$$

$$2. \vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P \wedge Q^{(1)}}{P} (\wedge E)}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)^{(2)}} (\rightarrow E)}{Q} (\rightarrow E) \\
 \frac{\perp}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)} (\rightarrow I) \quad (1) \\
 \frac{\perp}{(P \wedge Q) \rightarrow R} (\rightarrow I) \quad (2) \\
 \hline
 \perp \\
 \frac{\perp}{(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)} (\rightarrow I)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{P^{(3)} \quad Q^{(4)}}{P \wedge Q} (\wedge I)}{(P \wedge Q) \rightarrow R)^{(5)}} (\rightarrow E)}{R} (\rightarrow I) \\
 \frac{\perp}{Q \rightarrow R} (\rightarrow I) \quad (3) \\
 \frac{\perp}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)} (\rightarrow I) \quad (5) \\
 \hline
 \perp \\
 \frac{\perp}{(P \wedge Q) \rightarrow R \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))} (\rightarrow I)
 \end{array}$$

$$\frac{\perp}{(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)} (\leftrightarrow I)$$

C. 請以線性自然演繹法系統證明：(推論規則請參閱講義內容)

1. $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C), \neg B \rightarrow \neg A \vdash C$

(1)	$(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C)$	Pr
(2)	$\neg B \rightarrow \neg A$	Pr
(3)	$A \wedge (\neg B \vee C)$	(1), Dist
(4)	A	(3), Simp
(5)	$\neg \neg A$	(4), DN
(6)	$\neg \neg B$	(2),(5), MT
(7)	$\neg B \vee C$	(3), Simp
(8)	C	(6),(7), DS

2. $P \vee Q \rightarrow R, R \rightarrow S \vee T, T \rightarrow W, \neg S \wedge \neg W \vdash \neg P$

(1)	$P \vee Q \rightarrow R$	Pr
(2)	$R \rightarrow S \vee T$	Pr
(3)	$T \rightarrow W$	Pr
(4)	$\neg S \wedge \neg W$	Pr
(5)	$\neg S$	(4), Simp
(6)	$\neg W$	(4), Simp
(7)	$\neg T$	(3),(6), MT
(8)	$\neg S \wedge \neg T$	(5),(6), Conj
(9)	$\neg(S \vee T)$	(8), DeM
(10)	$\neg R$	(2),(9), MT
(11)	$\neg(P \vee Q)$	(1),(10), MT
(12)	$\neg P \wedge \neg Q$	(11), DeM
(13)	$\neg P$	(12), Simp