第五章：多變數的微分

翁秉仁 教授

Outline

多變數函數的微分

定義：

一個多變數函數 f 是由 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ 或 $\mathbb{R}^n$ 內某區域到 $\mathbb{R}$ 的函數，通常記成 $f(x_1, \cdots, x_n)$

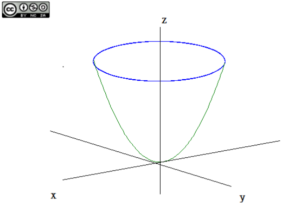
註：

當討論雙變數函數或三變數函數，常將函數記成

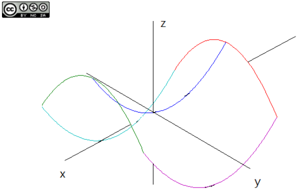
$$z = f(x, y) \text{ 與 } w = f(x, y, z)$$

雙變數的圖形

一些圖示的展示：



(a) $z = x^2 + y^2$



(b) $z = x^2 - y^2$

作圖-截面法

例 1： 平面 $\Sigma : z = mx + ny + k$ 的 x-斜率與 y-斜率。

解：

取截面 $y = b$ 與 Σ 相交，得到在 $y = b$ 上之直線方程式，形如

$$z = (k + nb) + mx = mx + k_0$$

因此 Σ 方程式中之 m，事實上是「沿 x 方向」(y 固定不動) 的斜率，而且和 b 的選取無關。同理在 $x = a$ 上截下之直線方程式形如

$$z = (k + ma) + ny = ny + k_1$$

仿照直線方程式之斜截式，將 $z = k + mx + ny$ 稱為平面的斜截式，其中 k 為 z-截距，m 為 x-斜率，n 為 y-斜率。

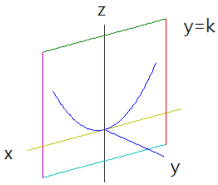
作圖-截面法

例 2： $z = x^2 + y$

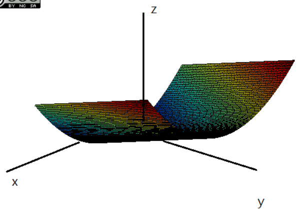
解：

(細節見課堂說明。)

(i) $y = k,\ z = x^2 + k$



(ii) $z = x^2 + y$



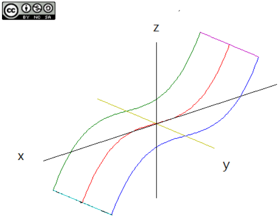
作圖-柱面法

例 3： 當 $f(x,y)$ 只是單變數函數。$z=g(x)$ 或 $z=h(y)$

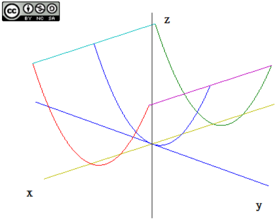
說明：

(a) $z=g(x)$。是以 xy-平面上，$z=f(x,0)=g(x)$ 的曲線為底，沿 y 方向所拉出得柱面。

(b) $z=h(y)$ 則是沿 x 方向拉出的柱面。



(a) $z=-x^3$



(b) $z=y^2$

作圖-旋轉法

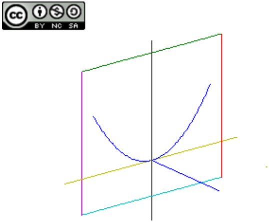
例 4： $z = x^2 + y^2$

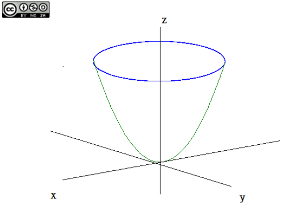
說明：

(i) $z = x^2$

(ii) 繞著中心 z 軸旋轉，得

$z = x^2 + y^2$



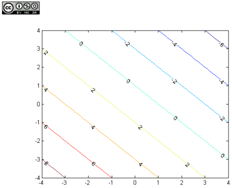


作圖-等高線法

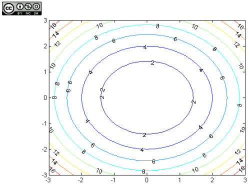
除了利用 $x = a$ 或 $y = b$ 截面的方法外，也可以利用 $z = c$ 截面的想法，在 $xy-$ 平面上得出 $f(x, y) = c$ 的曲線。變動 c 得到一系列曲線所構成的圖形，稱為 $f(x, y)$ 的等高線圖。實用上，c 通常取成等分割。

作圖-等高線法

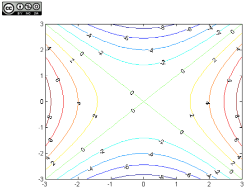
數學的例子：



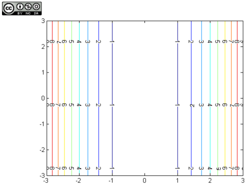
(a) $z = 1 - x - y$



(b) $z = x^2 + y^2$



(c) $z = x^2 - y^2$



(d) $z = x^2$

Outline

偏導數

定義：

$f(x,y)$ 在 (a,b) 點的偏導數為

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \qquad (f(x) \text{ 對 } x \text{ 之偏導數})$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \qquad (f(x) \text{ 對 } y \text{ 之偏導數})$$

注意：

我們常用 Leibniz 符號來表示偏導數，其中特別用符號 $\frac{\partial}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial}{\partial y}$ 取代單變數微分時的 $\frac{d}{dx}$ ，表示這是多變數的偏導數。$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 也常記為 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

計算偏導數之例子

例： 計算 $f(x,y)=e^{xy}$ 在 (a,b) 點的偏導數。

說明：

令 $g(x)=f(x,b)=e^{bx}$，則 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=g'(a)=be^{ab}$

同理，令 $h(y)=f(a,y)=e^{ay}$，則 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=h'(b)=ae^{ab}$

偏導函數

定義：

由在各點對 x 得偏導數構成一新雙變數函數，稱為對 x 的偏導函數記為

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

同理，對 y 的偏導函數記為

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

在計算對 x 的偏導函數時，只要將 y 視為常數，然後對 x 微分即可。同理，將 x 視為常數，就可以計算對 y 的偏導函數。

計算偏導函數之例子

例： 計算 $f(x, y) = \sin xy + x^2 e^{xy}$ 偏導函數。

說明：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy + 2xe^{xy} + yx^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos xy + x^3 e^{xy}$$

切面方程式

性質：

令 $z=f(x,y)$，則過 $(a,b,f(a,b))$ 點的切面方程式為

$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

(細節見課堂說明。)

切面方程式

例： $f(x,y)=\sin(xy)+x^2e^{xy}$，求過 $(0,\pi,0)$ 點的切面方程式。

由前例知：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi)=\pi+0+0=\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi)=0+0=0$$

所以切面方程式為

$$z=0+\pi\cdot(x-0)+0\cdot(y-\pi)\Rightarrow z=\pi\cdot x$$

線性逼近

敘述：

切平面：

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

是函數 $z = f(x,y)$ 在 (a,b) 點的一階逼近，若考慮 (a,b) 附近一點 $(a+\triangle x, b+\triangle y)$，則

$$f(a+\triangle x, b+\triangle y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\triangle y$$

線性逼近-例子

例： 圓柱體體積 $V = \pi r^2 h$

說明：

令 $V = V(r,h) = \pi r^2 h$，r 為半徑，h 為高。則其線性逼近為

$$\triangle V \approx 2\pi rh \cdot \triangle r + \pi r^2 \triangle h$$

如果測量某圓柱體，測得底半徑為 5 ± 0.1 cm，高為 12 ± 0.2 cm，則總體積的絕對誤差可估算如下。

$$\begin{aligned} |\triangle V| &\approx |2\pi \cdot 5 \cdot 12 \cdot \triangle r + \pi \cdot 5^2 \cdot \triangle h| \\ &\leq 17\pi \approx 53.4\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

如果求相對誤差得：

$$\frac{\triangle V}{V} \approx \frac{2\pi rh \triangle r + \pi r^2 \triangle h}{\pi r^2 h} = 2\frac{\triangle r}{r} + \frac{\triangle h}{h}$$

變數數目 ≥ 3 的情況

偏導數定義：

若 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 或 $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 n 變數函數，記成

$w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

則偏導數定義為：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_i + h, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{h}$$

計算時令 $g(x) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$，則

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n) = g'(a_i)$$

因此在計算偏導函數時，我們只要將其他變數視為常數即可。

變數數目 ≥ 3 的情況

例： $f(x,y,z,u,v) = xyz + e^z \sin\frac{y}{v}$，計算其偏導函數。

說明：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz + \frac{e^z}{v}\cos\frac{y}{v}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + e^z \sin\frac{y}{v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = -e^z \cdot \frac{y}{v^2}\cos\frac{y}{v},$$

變數數目 ≥ 3 的情況

一階逼近定義：

$f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $(a_1, \cdots, a_n)$ 點的一階逼近是

$f(a_1 + \triangle x_1, \cdots, a_n + \triangle x_n)$

$$\approx f(a_1, \cdots, a_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{(a_1,\cdots,a_n)} \triangle x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{(a_1,\cdots,a_n)} \triangle x_n$$

Outline

多變數函數的連鎖法則

敘述：

假設 $x=f(t), y=g(t)$ 且 $z=h(x,y)$。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (f(t),g(t)) & & \\ & & (x,y) & \mapsto & h(x,y) \end{array}$$

$$dz=\frac{\partial h}{\partial x}dx+\frac{\partial h}{\partial y}dy$$

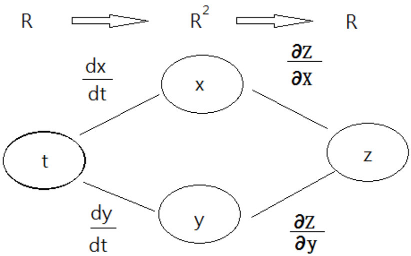
$$dx=\frac{df}{dt}dt,\quad dy=\frac{dg}{dt}dt$$

因此

$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{df}{dt}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{dg}{dt}\right)$$

多變數函數的連鎖法則

我們也可以用以下的樹狀圖說明。



因此

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{df}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{dg}{dt} \right)$$

多變數函數的連鎖法則

例： $z(x,y) = xy,\ \ x(u,v) = 2u - v,\ \ y(u,v) = \ln uv$，計算 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 與 $\frac{\partial z}{\partial v}$。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = y \cdot 2 + x \cdot \frac{1}{u} \\
&= 2\ln uv + \frac{2u-v}{u} \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = y \cdot (-1) + x \cdot \frac{1}{v} \\
&= -\ln uv + \frac{2u-v}{v}
\end{aligned}
$$

Outline

方向導數

定義：

f 在 (a, b) 點，沿方向 $\overrightarrow{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ 的方向導數為

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\cos\theta, b + h\sin\theta) - f(a, b)}{h}$$

註：

1. 在 $u = (1, 0)$ 或 $(0, 1)$ 時，這就是本來 $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ 的定義。

2. 作方向導數時，取 u 為該方向的單位向量。

梯度

定義：

$\nabla f(a,b) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$ 稱為 f 在 (a,b) 點的梯度。讓 (a,b) 變動，則得到梯度 (向量) 函數 $\nabla f(x,y)$，這是一個 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的函數。我們將它想成每一點對應到一個從該點出發的向量。

上述計算方向導數的公式可以簡寫成 (省略 a、b)

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}} = \nabla f \cdot \overrightarrow{u}$$

方向導數-例子

例： $f(x,y)=x^2+y^2$，在 $(1,0)$ 求沿著 $(1,1)$ 方向的方向導數。

說明：

$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(2x,2y)$。

沿著 $(1,1)$ 方向的單位向量為 $\overrightarrow{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。所以方向導數為

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(1,0)=\nabla f(1,0)\cdot\overrightarrow{u}=(2,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$$

梯度-性質

定理：(∇f 的性質)

假設 $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$，則

(1) 由 (a, b) 點出發，函數值 $f(x, y)$ 增加最快的方向，就是 $\nabla f(a, b)$ 的方向。而 $-\nabla f(a, b)$ 的方向則是下降最快的方向。換句話說，梯度方向就是最陡的方向。

(2) $\nabla f(a, b)$ 與過 (a, b) 點的等高線垂直。

(3) $|\nabla f(a, b)|$ 越大，等高線越密。

(見課堂說明。)

三變數以上的情形

定義：

令 $f = \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$， $w = f(x_1, \cdots, x_n)$，則

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

令 $\overrightarrow{u}$ 是單位向量 $(u_1, \cdots, u_n)$，其中 $\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = 1$，則方向導數定義為

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}} = \nabla f \cdot \overrightarrow{u} = \frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} u_n$$

梯度的性質-三變數情形

性質：

設 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，則 ∇f 與等高面 $f(x, y, z) = C$ 垂直 (假設 $\nabla f \neq 0$)。

證明：(見課堂說明。)

切面方程式

如果 $\nabla f(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$，由性質知，$\nabla f(a, b, c)$ 必垂直其切面，因此切面方程式就是

$$\nabla f(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b,c)}(x - a) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b,c)}(y - b) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(a,b,c)}(z - c) = 0$$

梯度的性質-三變數情形

例： 求曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 在 $(1,1,1)$ 的切面方程式。

說明：

令 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$，原曲面為 $f(x,y,z)=1$。

因為

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-2z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=-2$$

代入公式，得切面方程式為

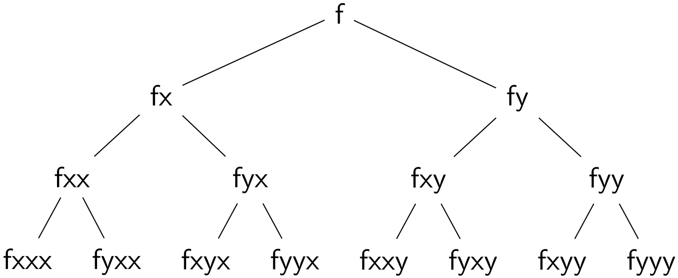
$$2(x-1)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Rightarrow x+y-z=1$$

Outline

高階偏導數

敘述：

如同單變數，我們可以考慮偏導函數的偏導數。但是由於變數多，高階偏導數出現較複雜的樣式 (如下圖式)。



註：

fx 為 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 縮寫，　fxy 為 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 縮寫。

高階偏導數

例： $f(x,y) = x^2 - e^{xy^2}$，計算其二階偏導數。

說明：

先計算 $f(x,y)$ 的偏導數：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y^2 e^{xy^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xye^{xy^2}$$

現對 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 各求其偏導數。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\equiv \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} &= 2 - y^4 e^{xy^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &\equiv \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} &= -2ye^{xy^2} - 2xy^3 e^{xy^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &\equiv \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} &= -2ye^{xy^2} - 2xy^3 e^{xy^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\equiv \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} &= -2xe^{xy^2} - 4x^2 y^2 e^{xy^2}
\end{aligned}$$

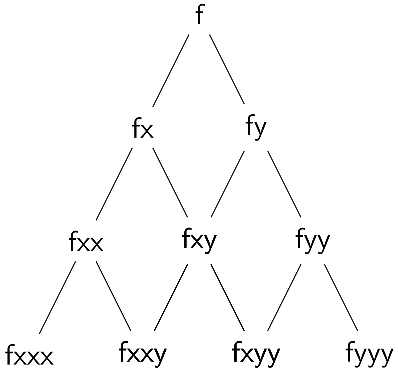
高階偏導數

歐拉性質：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

高階偏導數

好的函數都滿足所謂的歐拉性質，可把上述圖形化簡如下：



泰勒展式

定理：(雙變數之泰勒定理)

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= n\text{ 階泰勒多項式}P_n(x,y) + n\text{ 階餘項}R_n(x,y)\\
&= \left\{ f(a,b) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_i^k \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}\bigg|_{(a,b)} (x-a)^i (y-b)^{k-i} \right) \right\}\\
&+ \left\{ \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{i=0}^{n+1} C_i^{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}\bigg|_{((1-\xi)a+\xi x,(1-\xi)b+\xi y)} \right.\right.\\
&\quad \left.\left. \cdot (x-a)^i (y-b)^{n+1-i} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

其中 $0 \le \xi \le 1$，ξ 是 x 與 y 的函數。

註：展開至 $n=2$，由泰勒定理：

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &\approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b)\\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2 \right)
\end{aligned}
$$

Outline

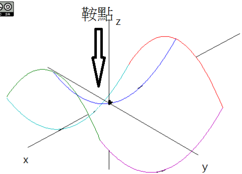
極值測試與應用

定義：(極值)

假設 $\nabla f(a,b)=(0,0)$。如果在 (a,b) 附近的點，所有點的函數值大於 $f(a,b)$，則稱 $(a,b,f(a,b))$ 為極小值，同樣地，函數值小於 $f(a,b)$，而稱為極大值。

定義：(鞍點)

假設 $\nabla f(a,b)=(0,0)$。如果在 (a,b) 附近的點，總是有些點的函數值大於 $f(a,b)$，又總是有另外一些點的函數值小於 $f(a,b)$，則稱 $(a,b,f(a,b))$ 為鞍點。



極值測試與應用

定理 1：

若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 點有極值 $f(a,b)$，則 $\nabla f(a,b)=(0,0)$

說明：

若 $\nabla f\neq 0$，則 $f(x,y)$ 沿 ∇f 方向會變大，沿$-\nabla f$ 方向會變小，所以不可能是極值。

- 滿足 $\nabla f(x,y)=(0,0)$ 的點，就是極值候選點。

由於在候選點 $\nabla f(a,b)=(0,0)$，對 $(x,y)=(a,b)$ 展開到二階泰勒多項式，並由雙變數的泰勒定理知道

$$f(x,y)-f(a,b)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2\right)$$

極值測試與應用

定理 2：(二階測試)

設 $\nabla f(a,b)=(0,0)$，定義一新雙變數函數如下：

$$D(x,y)\equiv\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}(x,y)$$

(1) 若 $D(a,b)>0$ 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$，則 $f(a,b)$ 是極小值。

(2) 若 $D(a,b)>0$ 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$，則 $f(a,b)$ 是極大值。

(3) 若 $D(a,b)<0$，則 $f(a,b)$ 是鞍點。

(4) 若 $D(a,b)=0$，無法判斷。

極值測試與應用

證明：

由泰勒定理得知：

$$f(x,y)-f(a,b)\approx\frac{1}{2}\Big(A(x-a)^2+2B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2\Big)$$

其中 $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$，$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

用配方法得

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{A}{2}\left(\left((x-a)+\frac{B}{A}(y-b)\right)^2+\frac{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{A^2}(y-b)^2\right)$$

(細節見課堂說明)

極值測試與應用-例子

例： $f(x,y)=x^3+y^2+3xy$，討論其候選點及極值性質。

說明：

(1) 先找候選點。解 $\nabla f(x,y)=(3x^2+3y,2y+3x)=(0,0)$，得到兩個候選點 $(0,0)$、$(\frac{3}{2},-\frac{9}{4})$。

(2) 由二階測試

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=12x-9$$

$$\begin{cases} (1) \quad D(0,0)=-9<0\text{，所以 }(0,0,0)\text{ 為鞍點。} \\ (2) \quad D(\frac{3}{2},-\frac{9}{4})>0\text{，且 }\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{3}{2},-\frac{9}{4})=6\cdot\frac{3}{2}=9>0\text{，所以} \\ \qquad f(\frac{3}{2},-\frac{9}{4})=-\frac{27}{16}\text{ 是極小值。} \end{cases}$$

最小乘方法

$$\text{資料：}(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_n, b_n)$$

$$\text{直線：}y = mx + k, \quad m, k\text{未定}$$

欲找 m、k ，使得直線和資料之間的誤差最小。

最小乘方法考慮的誤差形如

$$E(m, k) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - (ma_i + k))^2 \text{ (即考慮理論值與實驗值差的平方和。)}$$

最小乘方法

經計算得到，m、k 之估計即：m^*、k^*

$$\begin{cases} m^* & = \frac{\overline{a}\,\overline{b}-\overline{ab}}{\overline{a}^2-\overline{a^2}} \\ k^* & = \overline{b}-\overline{a}m^* \end{cases}$$

其中 $\overline{a}=\frac{\sum a_i}{n}, \overline{ab}=\frac{\sum a_i b_i}{n}, \cdots, \overline{a^2}=\frac{\sum a_i^2}{n}$ 等。

最小乘方法-例子

例： 用最小乘方法求滿足 $(1,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,3)$ 之最佳直線。

說明：

	a	b	a^2	b^2
	1	1	1	1
	1	2	1	2
	2	2	4	4
	3	2	9	6
$+)$	4	3	16	12
	11	10	31	25
平均	$\frac{11}{5}$	2	$\frac{31}{5}$	5

所以 $m^* = \frac{15}{34}$, $k^* = \frac{35}{34}$，而最佳直線為

$$y = \frac{15}{34}x + \frac{35}{34}$$

Outline

有限制之極值問題-Lagrange 乘子法

定理：(Lagrange 乘子法-2 維情形)

設 $f(x,y)=0$，欲求 $g(x,y)$ 的極值，則要解下列方程組：

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) & = & \lambda \nabla f(x,y) \\ f(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & = & \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) & = & \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ f(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

註：

用 Lagrange 乘子法只能找到候選點，至於是不是極值，是極大或極小值都得另外判斷。

邊界極值問題-例子

例 1: 假設 $x^2+y^2=1$，求 xy 極值。

$$\left\{\begin{array}{lcl}\nabla(xy) & = & \lambda\nabla(x^2+y^2-1)\\ f(x,y) & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}2x\lambda & = & y\\ 2y\lambda & = & x\\ x^2+y^2 & = & 1\end{array}\right.$$

$4\lambda^2x=x$，得 $x=0$ 或 $\lambda=\pm\frac{1}{2}$

(1) 若 $x=0$，則 $y=2x\lambda=0$，這與 $x^2+y^2=1$ 矛盾。

(2) $$\left\{\begin{array}{lll}\lambda=\frac{1}{2} & \Rightarrow y=x & \Rightarrow (x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})\\ \lambda=-\frac{1}{2} & \Rightarrow y=-x & \Rightarrow (x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})\end{array}\right.$$

(3) 把這些候選點代入 $g(x,y)$ 並比較大小，得

$$\left\{\begin{array}{lcll}g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) & = & \frac{1}{2} & (\text{極大值})\\ g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}) & = & -\frac{1}{2} & (\text{極小值})\end{array}\right.$$

區域極值問題-例子

例 2： $x^2+y^2 \le 1$，求 $f(x,y)=x^2-\frac{5}{2}xy+y^2$ 之最大最小值。

(1) 考慮內部：$x^2+y^2<1$，由二階測試

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x-\frac{5}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{5}{2}x+2y \end{cases} \qquad (0,0)\text{為候選點。}$$

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}<0\text{，所以 }(0,0)\text{ 為鞍點。}$$

(2) 考慮邊界在 $x^2+y^2=1$ 的條件下，求 $x^2-\frac{5}{2}xy+y^2$ 的極值。

由 Lagrange 乘子法

$$\begin{cases} \nabla\left(x^2-\frac{5}{2}xy+y^2\right)=\lambda\nabla\left(x^2+y^2-1\right) \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-\frac{5}{2}y=\lambda\cdot(2x) \\ -\frac{5}{2}x+2y=\lambda\cdot(2y) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

區域極值問題-例子

當 $\lambda = \frac{9}{4}$ 時，

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ x^2 - \frac{5}{2}xy + y^2 = \frac{9}{4} \quad (\text{極大值}) \end{cases}$$

當 $\lambda = -\frac{1}{4}$ 時，

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x = \frac{5}{2}y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ x^2 - \frac{5}{2}xy + y^2 = -\frac{1}{4} \quad (\text{極小值}) \end{cases}$$

所以在邊界 $x^2 + y^2 = 1$ 上之最大值為 $\frac{9}{4}$，最小值為 $-\frac{1}{4}$

(3) 由 (1)(2) 知在區域 $x^2 + y^2 < 1$ 內無極值，最大最小值發生在邊界上，因此原題之最大值為 $\frac{9}{4}$，最小值為 $-\frac{1}{4}$。

Lagrange 乘子法

定理：(λ 的意義)

限制條件 $f(x, y) = C$，隨著 C 變化時，$g(x, y)$ 之極值也會隨著變化 (因此是 C 的函數)，其變化率為 $\lambda(C)$。

變數數目 3 (甚至更高) 時：

Lagrange 乘子法是一樣的。在 $f(x, y, z) = 0$ 的條件下，求 $g(x, y, z)$ 的極值，則要解

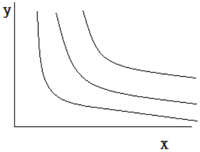
$$\begin{cases} \nabla g(x, y, z) & = \lambda \nabla f(x, y, z) \\ f(x, y, z) & = 0 \end{cases}$$

應用：無差異曲線

在冬天，巧克力與蘇打餅都有補充熱量的功效，但是顯然吃多了巧克力，您就不想吃蘇打餅，反之亦然。這表示巧克力與蘇打餅間有替代的功能存在。我們將這種替代效果描繪出來，就變成下圖的無差異曲線，每一條曲線各表示同樣效用的替代關係。

註：

無差異曲線是遞減，凹向上的不相交曲線族。



X=蘇打餅，Y=巧克力

應用：無差異曲線

如果令 $g(x,y)$ 表示 x 單位甲與 y 單位乙的效用函數，

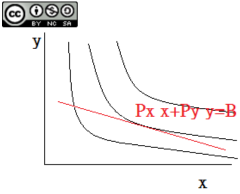
則無差異曲線就是 $g(x,y)=C$ 的曲線族 (等效用線)。

現在假設，我們有一筆固定且要花光的預算來買甲與乙，

$$P_x \cdot x + P_y \cdot y = B$$

我們希望得到最大的效用，即求 $g(x,y)$ 之最大值。

如下圖所示：



X=甲、Y=乙

應用：無差異曲線

由 Lagrange 乘子法，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \lambda \cdot P_x \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = \lambda \cdot P_y \\ P_x \cdot x + P_y \cdot y = B \end{cases}$$

由此我們得到，極值點滿足方程式

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{P_x} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{P_y}$$

應用：無差異曲線-例子

例： 假設無差異曲線函數為 $g(x,y)=\frac{xy}{2x+y}$, $x,y>0$ 且 $P_x=1,\ P_y=2,\ B=9$。

說明：

計算：

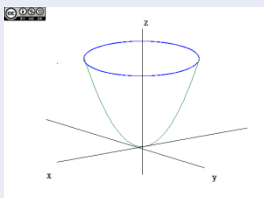
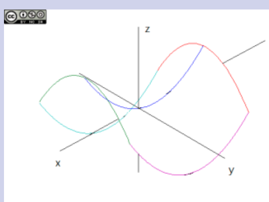
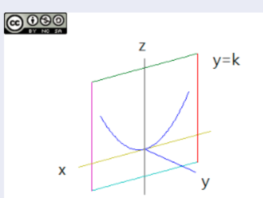
$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{y^2}{(2x+y)^2},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{2x^2}{(2x+y)^2}$$

代入方程式得

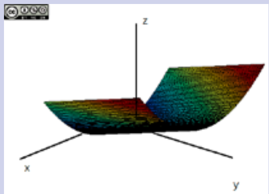
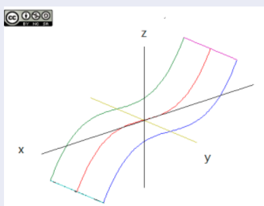
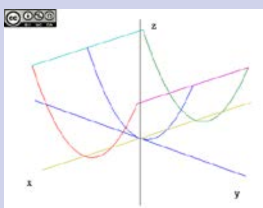
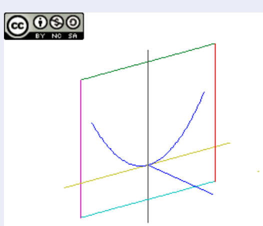
$$\frac{y^2}{1}=\frac{2x^2}{2}\Rightarrow y=x \quad \text{or} \quad y=-x\,(\text{不合})$$

因為 $x+2y=9\Rightarrow x=3,\ y=3$。

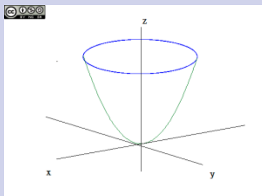
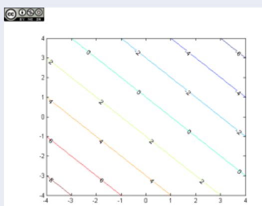
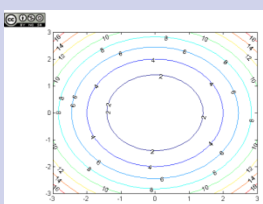
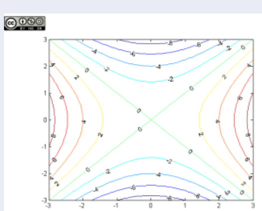
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
1、60-64			轉載自Microsoft Office 2010 PowerPoint 設計主題範本 本作品依據 Microsoft 服務合約及著作權法第46、52、65條合理使用。
4			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
4			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
6			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

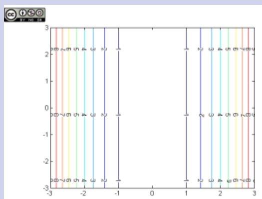
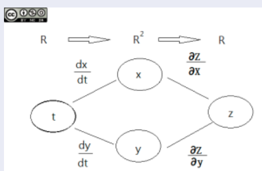
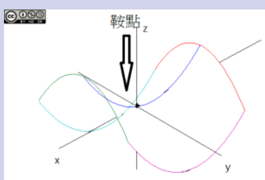
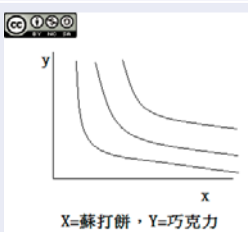
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
6		BY NC SA	者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
7		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
7		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
8		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
8			者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
10			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
10			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
10			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
10		CC BY NC SA	者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
25		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
42		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
56		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明