第三章：積分及其應用

翁秉仁 教授

Outline

黎曼和與定積分

微積分基本定理

基本積分技巧

有理函數積分

三角函數積分

幾何度量

重心

黎曼和

黎曼和的定義

假設有一函數 $f(x)$ 定義在 $[a,b]$ 上，我們將 $[a,b]$ 等分切割成 N 段：

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b,$$
$$\triangle x \equiv \triangle x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N}$$

然後在每一段 $[x_{i-1}, x_i]$ 中選一個數 ξ_i，則：

$$\text{黎曼和} = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \triangle x, \qquad x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$$

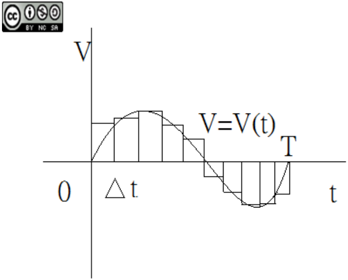
注意：$f(\xi_i)$ 不用有特別限制 (例如大於 0，遞增...)。

黎曼和的應用

例： (速度與位移)：

說明：

考慮一部車子在直線上行走，其速度函數 $v = v(t)$，函數圖形如圖，若 $t = 0$ 時，車從原點出發。$S(t)$ 表示時間 t 的位置。



黎曼和的應用

從公式：

$$\text{距離} = \text{速度} \times \text{時間}$$

$$\text{車子的淨移動位移大概是} \sum_{i=1}^{N} v(\xi_i) \cdot \triangle t,$$

$$\text{其中} 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$$

注意：$v(t)$ 可能有正有負。

定積分

敘述：

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是連續函數，則黎曼和總是會收斂到一個固定值。當黎曼和會收斂時，這個極限值稱為 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定積分。用下面符號表示：

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \cdot \triangle x$$

約定：

(1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

定積分的基本性質

定積分的基本性質：

(1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

(2) $\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$

(3) $\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$

(4) 若 $f(x) \leq g(x)$, b>a, 則 $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

定積分的平均值定理

函數的平均值：

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(見課堂說明。)

例： 計算 $f(x) = x^3$ 在 $[a, b]$ 區間上的平均值。

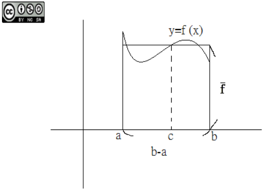
說明：

$$\begin{aligned}\overline{f} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{4}(a^2+b^2)(a+b)\end{aligned}$$

定積分的平均值定理

定理：

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上為連續函數 (如圖所示)，則在 $[a, b]$ 上必有一點 c ，使得 $\overline{f} = f(c)$。



(a) $\int_a^b f(x)\, dx = \overline{f}(b-a)$

outline

黎曼和與定積分

微積分基本定理

基本積分技巧

有理函數積分

三角函數積分

幾何度量

重心

微積分基本定理

微積分基本定理：

(1) 若 $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$，則 $F'(x)=f(x)$。
(亦即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數)

(2) 若 $G(x)=f(x)$，則 $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)\equiv G(x)\,|_a^b$
(見課堂說明。)

積分問題

例：(用微積分基本定理)

(1) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = 2$

(2) $\int_0^1 e^x\, dx = e^x|_0^1 = e - 1$

(3) $\int_1^2 \ln x\, dx =?$ (下章說明)

微積分基本定理-應用

例： 計算 $\left(\int_1^{x^2} f(x)\,dx\right)'$

令 $F(x)=\int_1^x f(x)\,dx \Rightarrow F'(x)=f(x)$ (由微積分基本定理)

$$\left(\int_1^{x^2} f(x)\,dx\right)' = \left(F(x^2)\right)' = F'(x^2)\cdot(x^2)' = f(x^2)\cdot 2x$$

Outline

黎曼和與定積分

微積分基本定理

基本積分技巧

有理函數積分

三角函數積分

幾何度量

重心

分部積分 ↔ Leibniz 法則

分部積分：

由 Leibniz 法則：

$$f'(x)\,g(x) = (f(x)\,g(x))' - f(x)\,g'(x)$$

$$\Rightarrow \int f'(x)\,g(x)\,dx = \int (f(x)\,g(x))'\,dx - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

- $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$ $\Big($不定積分表示式$\Big)$
- $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = (f(x)\,g(x))\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$ $\Big($定積分表示式$\Big)$

分部積分-例題

分部積分可以簡記成：

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

例 1. 計算 $\int xe^x\,dx$

$$令 u = x,\ dv = e^x\,dx$$

$$\int xe^x\,dx = \int x\,d(e^x) = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

分部積分-例題

例 2. 遞迴關係：$\int x^n e^x \, dx$

$$\text{令 } E_n(x) = \int x^n e^x \, dx$$

$$E_n(x) = \int x^n \, d(e^x) = x^n e^x - \int e^x (n x^{n-1}) dx$$

$$= x^n e^x - nE_{n-1}(x)$$

$$\text{遞迴式} \begin{cases} E_n(x) & = x^n e^x - nE_{n-1}(x) \\ E_0(x) & = e^x + C \end{cases}$$

分部積分-例題

例 3. $\begin{cases} \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C \\ \int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C \end{cases}$

（見課堂說明。）

例 4. 計算 $\int \ln x\, dx$.

$$\begin{aligned} \int \ln x\, d(x) &= \ln x \cdot x - \int x\, d(\ln x) \\ &= x \ln x - \int 1\, dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

變換變數法 $\leftrightarrow$ 連鎖法則

變換變數法原理：

由連鎖法則：

$$
\begin{aligned}
& f(\,g(x)\,)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
\xrightarrow{\text{積分}} & \int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C
\end{aligned}
$$

可以用下列方法簡化：

$$
\begin{aligned}
& \int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(g(x))\,d(g(x)) \\
\xrightarrow{u=g(x)} & \int f'(u)\,du = f(u) + C
\end{aligned}
$$

變換變數法-例題

例 1. 計算 $\int xe^{x^2}\, dx$

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int e^{x^2}\, d\left(x^2\right) \overset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int e^u\, du \\ &= \frac{1}{2}e^u + C \overset{\text{代回}}{=} \frac{1}{2}e^{x^2} + C\end{aligned}$$

例 2. 計算 $\int \tan x\, dx$

$$\begin{aligned}\int \tan x\, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{\cos x}\, d(\cos x) \\ &\overset{u=\cos x}{=} -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln|u| + C \\ &\overset{\text{代回}}{=} -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

變換變數法-例題

例 3. 計算 $\int \tan^{-1} x\, dx$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\overset{x=\tan u}{=} \int \tan^{-1}(\tan u)\, d(\tan u) \\
&= \int u\, d(\tan u) \\
&= u \tan u - \int \tan u\, du \\
&= u \tan u - \ln|\sec x| + C \\
&\overset{\text{代回}}{=} x \tan^{-1} x - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) + C
\end{aligned}
$$

變換變數的定積分形式

定積分形式：

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(g(x))\,g'(x)\,dx &= \int_a^b f'(g(x))\,d(g(x)) \\ &\overset{u=g(x)}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f'(u)\,du \\ &= f(g(b)) - f(g(a))\end{aligned}$$

例： 計算 $\int_o^\pi 3\cos^2 x \sin x\, dx$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= -\int_0^\pi 3\cos^2(x)\, d(\cos x) \\ &\overset{u=\cos x}{=} -\int_{\cos 0}^{\cos\pi} 3u^2\, du \\ &= -\int_1^{-1} 3u^2\, du = -u^3\big|_1^{-1} = 2\end{aligned}$$

一個其他積分的例子

- 計算 $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$。

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\overset{x=\tan\theta}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,d(\tan\theta) = \int \frac{1}{\sec\theta}\,\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \sec\theta\,d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{1}{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \int \frac{1}{1-\sin^2\theta}\,d(\sin\theta) \\
&\overset{\sin\theta=u}{=} \int \frac{1}{1-u^2}\,du = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C \overset{u=\sin\theta}{=} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| + C = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&\overset{\theta=\tan^{-1}x}{=} \ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right| + C
\end{aligned}
$$

outline

黎曼和與定積分

微積分基本定理

基本積分技巧

有理函數積分

三角函數積分

幾何度量

重心

標準的例子

例 1
$$\begin{cases} \int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C \\ \int \frac{1}{x^n}\,dx &= \frac{1}{1-n}x^{1-n} + C \quad (n \neq 1) \end{cases}$$

例 2
$$\begin{cases} \int \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \\ \int \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx &= \frac{1}{2(1-n)}(x^2+1)^{1-n} + C \end{cases}$$

例 3
$$\begin{cases} E_1(x) &= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \\ E_n(x) &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx \\ &= \frac{2n-3}{2n-2}E_{n-1}(x) + \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + C \end{cases}$$

有理函數 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的積分步驟

1. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{商式 (多項式)} + \frac{\text{餘式}}{Q(x)}$

   只考慮 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, 其中 $P(x)$ 的次數 $< Q(x)$ 的次數。

2. $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdots Q_k(x)$ 其中 $Q_i(x)$ 是 $Q(x)$ 的因式 $\forall i$。

   $Q_i(x)$ 其形如下：

   $$\begin{cases} \text{一次因式：} & (x+\alpha)^m, & m \in \mathbb{N} \\ \text{二次因式：} & (x^2+\beta x+\gamma)^n, & n \in \mathbb{N} \text{ 且 } \beta^2 - 4\gamma < 0 \end{cases}$$

3. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)}$ 其中 $P_i(x)$ 次數 $< Q_i(x)$ 次數 $\forall i$。

有理函數 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的積分步驟

4. $$\frac{P_i(x)}{Q_i(x)} \text{ 符合 } \begin{cases} \dfrac{P_i(x)}{(x+\alpha)^m} = \dfrac{A_1}{(x+\alpha)} + \dfrac{A_2}{(x+\alpha)^2} + \cdots + \dfrac{A_m}{(x+\alpha)^m} \\ \dfrac{P_i(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} = \dfrac{B_1x+C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)} + \cdots \dfrac{B_nx+C_n}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} \end{cases}$$
   這兩種情況。
5. 根據前面介紹的標準例子，去計算 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$。

有理函數積分-例子

例 1. 計算 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\, dx$.

(細節請見課堂說明。)

因為

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)^2}\, dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

有理函數積分-例子

例 2. 計算 $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$

(細節請見課堂說明。)

因為

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{4}(x+1)}{x^2+1} + \frac{\frac{-1}{2}(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{原式} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{4}(x+1)}{x^2+1} + \frac{\frac{-1}{2}(x-1)}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{-1}{4}\left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) \right) dx$$

有理函數積分-例子

$$
\begin{aligned}
=&\frac{-1}{4}\left(-\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x\right)\\
&+\left(\frac{1}{4(x^2+1)}+\frac{1}{4}\left(\tan^{-1}x+\frac{x}{x^2+1}\right)\right)+C\\
=&\frac{-1}{4}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+1}+C
\end{aligned}
$$

outline

黎曼和與定積分

微積分基本定理

基本積分技巧

有理函數積分

三角函數積分

幾何度量

重心

三角函數積分

考慮 $\int f(x)\,g(x)\,dx$ 的不定積分，其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為三角函數的冪次函數。(所有三角函數都是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 或者其倒數的乘積。)

我們只需要處理：

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

就 m, n 情形分以下兩個情況：

(1) m 或 n 是奇數。

(2) m 和 n 都是偶數。

三角函數積分-情況 (1) 和 (2)

(1) m 或 n 是奇數。

以 $m = 2k + 1$ 為例 (或 $n = 2k + 1$ 注意 k 可能為負數)

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x \, dx$$

$$= \int \sin^{2k} x \cos^n x \left(\sin x \, dx \right) = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \, d(\cos x)$$

$$\overset{u=\cos x}{=} -\int (1 - u^2)^k u^n \, du$$

$\Big(u$ 的有理函數的不定積分$\Big)$

(2) m 和 n 都是偶數。

先考慮三角恆等式：

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - \sin^2\theta$$

當 m, n 次數減半，再利用 (1) 或 (2) 的步驟繼續下去。

三角函數積分-例題

例 1. 計算 $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= -\int \sin^2 x \cos^2 x \, d(\cos x) = -\int (1-u^2)u^2 \, du \\
&= \int (-u^2 + u^4) \, du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C \\
&= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C
\end{aligned}
$$

例 2. 計算 $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)\cdot(1+\cos 2x) \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C
\end{aligned}
$$

三角函數積分-例題

例 3.

$$\begin{cases} \int \sec^3 x\,dx - \int \tan^2 x \sec x\,dx & = \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int \sec^3 x\,dx + \int \tan^2 x \sec x\,dx & = \tan x \sec x + C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \sec^3 x\,dx & = \frac{1}{2}\left(\tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C \\ \int \tan^2 x \sec x\,dx & = \frac{1}{2}\left(\tan x \sec x - \ln|\sec x + \tan x|\right) + C \end{cases}$$

(見課堂說明)

Outline

黎曼和與定積分

微積分基本定理

基本積分技巧

有理函數積分

三角函數積分

幾何度量

重心

面積-例題

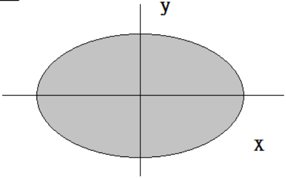
例： 橢圓：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面積 $=ab\pi$。

說明：

橢圓面積等於上半橢圓面積的兩倍。

$$
\begin{aligned}
\text{面積} &= 2\cdot\int_{-a}^{a}\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}\,dx \\
&\overset{u=\frac{x}{a}}{=} 2\cdot a\cdot b\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du \\
&= 2\cdot a\cdot b\cdot\tfrac{\pi}{2}=ab\pi
\end{aligned}
$$

Figure:



曲線的長度

公式：

$y = f(x)$ (如下圖) 定義在 $[a, b]$ 上，則函數曲線的長度為

$$長度 = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

曲線長度可以用一個黎曼和來逼近

$$曲線長度 \approx \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\triangle x_i^2 + f'(\xi_i)^2 \triangle x_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\, \triangle x_i$$

(見課堂說明。)
當 $n \to \infty$，黎曼和逼近下列式子

$$長度 = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

曲線的長度-例題

例： 求 $x^2+y^2=r^2$ 圓周長。

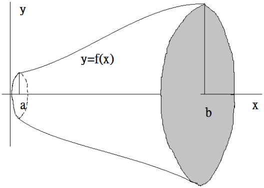
隱函數微分得到：$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$。

$$
\begin{aligned}
\text{圓周長} &= 2\times\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx \\
&= 2r\int_{-r}^{r}\frac{1}{r^2-x^2}\,dx \overset{u=\frac{x}{r}}{=} 2r\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= 2r\cdot\sin^{-1}u\Big|_{-1}^{1} = 2r\left(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right) \\
&= 2\pi r
\end{aligned}
$$

旋轉體體積-圓盤法

說明：

設 $y=f(x)\geq 0$ 定義在 $[a,b]$ 上，考慮 $f(x)$ 圖形，$x=a$，$x=b$，與 $x-$ 軸所圍成的區域，求這個區域繞 $x-$ 軸旋轉之旋轉體體積 (如圖)。



$$旋轉體體積 = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

旋轉體體積-圓盤法

例： 半徑 r 之球體積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$。

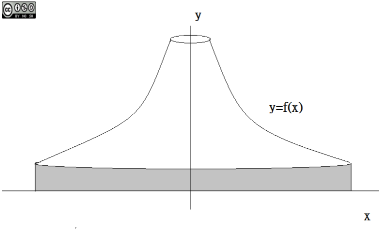
說明：
半徑 r 的球，可想成 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 的上半圍繞 $x-$ 軸旋轉之旋轉體。因此函數是 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$。

$$
\begin{aligned}
\text{球體積} &= \int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx \\
&= \pi(2r^3 - \frac{1}{3}(2r^3)) = \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}
$$

旋轉體體積-殼形法

說明：

如果換個方向，考慮上述 $y = f(x)$ 圖形下區域對 $y-$ 軸旋轉的旋轉體體積 (如圖)。



$$\text{旋轉體體積} = \int_a^b 2\pi\, x f(x)\, dx$$

旋轉體體積-殼形法

例： 半徑 r 之球體積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$。

說明：
求體積是右半圓 $(x \geq 0)$ 繞 $y-$ 軸旋轉的結果，這個區域可以寫成

$$0 \leq x \leq r,\ -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

得

$$\text{球體積} = \int_0^r 2\pi x\left(\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2})\right)\, dx$$
$$= 4\pi \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi\left(-\frac{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Outline

黎曼和與定積分

微積分基本定理

基本積分技巧

有理函數積分

三角函數積分

幾何度量

重心

槓桿的重心

A, B 兩個物體放在 $x-$ 軸上，且 A 的坐標為 a，B 的坐標為 b，

$$A,\ B\ \text{的重心}\ \bar{a} = \frac{m_A \cdot a + m_B \cdot b}{m_A + m_B}$$

推廣：

n 個物體 $A_i, i = 1\cdots, n$。令這 n 個物體 A_i 之重量為 m_i，坐標各為 a_i，且令重心坐標為 $\bar{a}$，於是利用槓桿原理可以得到

$$\bar{a} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

橫桿的重心

考慮重心的位置時，我們將第一部分的物體，想成是一集中在 $\bar{a}_1$ 且重量 M_1 的大物體；而第二部分的物體，則是集中在 $\bar{a}_2$ 且重量為 M_2 的另一物體，我們可以得到

$$\text{全部物體的重心}\bar{a} = \text{這兩大物體的重心} = \frac{M_1\bar{a}_1 + M_2\bar{a}_2}{M_1 + M_2}$$

註：這個基本原理稱為重心分解原理。

橫桿的重心

將橫桿置於 $[a,b]$ 上，其密度以 $\rho(x)$ 表示。

$$\text{重心} = \frac{\int_a^b x\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx}$$

(見課堂說明。)

例： 設密度 $\rho(x)=x$ ，其中 $0 \le x \le 1$，計算此桿之重心？

說明：

$$\text{重心} = \frac{\int_0^1 x\cdot x\,dx}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^1}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^1} = \frac{2}{3}$$

平面分布的重心

計算平面區域重心坐標時，可以在 x 方向，y 方向上分開計算，其 x 坐標與 y 坐標各自之重心，即得全體之重心。也就是若設此 n 物體坐標各為 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，則

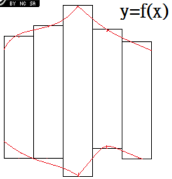
$$\text{重心}(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \right)$$

註：重心公式仍然滿足前述之重心分解原理。

平面分布的重心

將 $[a, b]$ 作等分割，任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 。再構作一系列長方形：以 $f(\xi_i) - g(\xi_i)$ 為長方形的長，$\triangle x_i$ 為寬，則這些長方條組合構成此區域的近似。但是長方形 $[x_{i-1}, x_i] \times [g(\xi_i), f(\xi_i)]$ 的重心 (形心) 已知在兩對角線相交處，即第 i 長方條重心

$$(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{f(\xi_i) + g(\xi_i)}{2} \right)$$



平面分布的重心

所以利用上述的黎曼和，得到下列公式 (假設 ρ 是常數)

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))\,dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx} \qquad \bar{y} = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

注意：這個公式和密度常數 ρ 無關，重心只和區域幾何形狀有關，稱為形心。

平面分布的重心

例： 將 $\frac{1}{4}$ 單位圓放在第一象限，求其重心。

$$\text{面積} = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi}{4} r^2 \text{，因此}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{\frac{\pi r^2}{4}} \int_0^r x\sqrt{1 - x^2}\, dx \\
&= \frac{4}{\pi r^2} \left(-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^r\right) = \frac{4}{3\pi} r \\
\bar{y} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\pi}{4} r^2} \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi r^2} \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^r \right) = \frac{4}{3\pi} r
\end{aligned}$$

註：半徑 r，中心在原點的半圓，其重心 $(0, \frac{4}{3\pi} r)$

Pappus 定理

Pappus 定理

區域重心在$(\bar{x}, \bar{y})$，則

$$\text{其繞 x-軸旋轉之旋轉體體積} = 2\pi\bar{y}\cdot(\Omega \text{ 的面積})$$

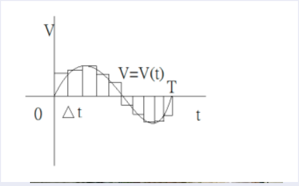
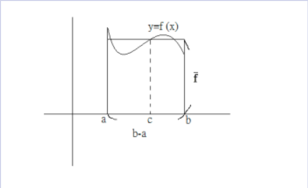
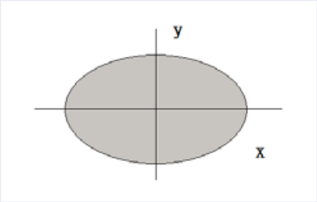
例： 求球體積。

說明：

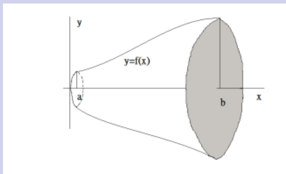
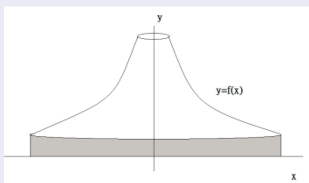
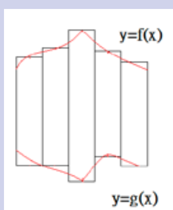
已知半圓重心 $= (0, \frac{4}{3\pi}r)$，用 Pappus 定理知：

$$\begin{aligned}\text{球體積} &= \text{半圓繞}x-\text{軸的旋轉體體積}\\ &= 2\pi\cdot(\tfrac{4}{3\pi}r)\cdot(\tfrac{\pi}{2}r^2) = \tfrac{4}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
1、53-54			轉載自Microsoft Office 2010 PowerPoint 設計主題範本 本作品依據 Microsoft 服務合約及著作權法第46、52、65條合理使用。
4			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
9			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
37			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
40		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
42		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
49		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。