第二章：微分及其應用

翁秉仁 教授

Outline

導數

連鎖法則與反函數的導數

隱函數微分

平均值定理

描述函數的圖形

微分的應用-最佳化

導數

定義：

函數 $f(x)$ 在 a 點的導數定義為

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ 或 } f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

性質：

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

Outline

導數

連鎖法則與反函數的導數

隱函數微分

平均值定理

描述函數的圖形

微分的應用-最佳化

連鎖法則

連鎖法則：

若 $F(x) = f(g(x))$，則 $F(x)$ 的導函數為

$$F'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- 其中關鍵：

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\end{aligned}$$

連鎖法則

Leibniz 表示法：

$$\frac{\triangle z}{\triangle x} = \frac{\triangle z}{\triangle y} \cdot \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

- 若 $\triangle x \to 0$，則

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

連鎖法則-例子

例 1. $\sin(x^2)$ 和 $(\sin x)^2$ 的導函數

例 2. $\sqrt{1+\cos(x^2)}$ 的導函數

$$\left(\sqrt{1+\cos(x^2)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos(x^2)}} \cdot (1+\cos(x^2))'$$
$$= -\frac{x\sin(x^2)}{\sqrt{1+\cos(x^2)}}$$

反函數的導函數

性質：

若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函數，則

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

證明：

由於 $f(g(x)) = x$，所以

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

應用

1. 反三角函數。

- $(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\cos^{-1}x)' = (\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1}x)} = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\cot^{-1}x)' = (\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x)' = \frac{-1}{1+x^2}$
- $(\sec^{-1}x)' = \frac{1}{\sec(\tan^{-1}x)\tan(\tan^{-1}x)} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $(\csc^{-1}x)' = (\frac{\pi}{2} - \sec^{-1}x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

應用

2. 指數函數。

令 $f(x) = \ln x$、反函數 $g(x) = e^x$

- $(e^x)' = \dfrac{1}{f'\big(g(x)\big)} = \dfrac{1}{1/e^x} = e^x$
- $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

應用

3. 指數微分型式。

   $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x) + \ln f(x) \cdot f(x)^{g(x)} \cdot g'(x)$

   利用 $f(x)^{g(x)} \equiv e^{g(x)\ln f(x)}$，見課堂說明。

4. 對數微分型式。

   若 $f(x) = (f_1(x))^{m_1} \cdot (f_2(x))^{m_2} \cdots (f_k(x))^{m_k}$，則

$$f'(x) = f(x) \cdot \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \frac{f_i{}'(x)}{f_i(x)}$$

   利用 $(\ln f(x))'$，見課堂說明。

函數曲線參數式

函數曲線參數式：

設函數曲線有參數式 $(x(t), y(t))$ 且 $x(t_0) = a,\ y(t_0) = b$，
則在 $t = t_0$

- 斜率表示式為：$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$
- 切線方程式為：$(y - b) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \cdot (x - a)$

高階導函數

二階導函數：

- 一般表示：$(f'(x))' = f''(x)$
- Leibniz 表示：$\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}f(x)) \equiv (\frac{d}{dx})^2 f(x) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$ 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

n 階導函數：

- 一般表示：$f^{(n)}(x) \equiv (f^{(n-1)}(x))'$
- Leibniz 表示：$\frac{d^n f}{dx^n}$ 或 $\frac{d^n y}{dx^n}$

高階導函數例子

例 1. $f(x) = x^n$

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} n! & m = n \\ 0 & m > n \end{cases}$$

例 2. $f(x) = \sin x$

$$\frac{d^k}{dx^k}(\sin x) = \begin{cases} \sin x, & k = 4m \\ \cos x, & k = 4m+1 \\ -\sin x, & k = 4m+2 \\ -\cos x, & k = 4m+3 \end{cases}$$

例 3. $f(x) = e^x$

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^x) = e^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

聲明：

除非另外聲明，我們將假設所討論的函數，在其定義域上可以一直做更高階的導函數，也因此所有的 n 階導數都是連續的。這種函數稱為「好」的函數。

基本事實：

多項式函數、有理函數、三角函數、反三角函數、指數函數、對數函數都是好的函數。

Outline

導數

連鎖法則與反函數的導數

隱函數微分

平均值定理

描述函數的圖形

微分的應用-最佳化

例子說明

斜率及切線作法：

一圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 上，對 x 微分得

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

在 (x_0, y_0) 點的切線斜率為 $-\frac{x_0}{y_0}$，切線方程式為

$$(y - y_0) = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

例子說明

二階導函數作法：

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2=r^2 &\Rightarrow 2x+2yy'=0(\text{等號兩邊對微分}) \qquad (1)\\
&\Rightarrow y'=-\frac{x}{y}\\
\text{由}(1) &\Rightarrow 2+2(y')^2+2yy''=0(\text{等號兩邊再微分})\\
&\Rightarrow 1+(-\frac{x}{y})^2+yy''=0(\text{消去 2 後代入}y')\\
&\Rightarrow y''=-\frac{r^2}{y^3}
\end{aligned}
$$

Outline

導數

連鎖法則與反函數的導數

隱函數微分

平均值定理

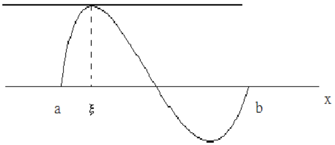
描述函數的圖形

微分的應用-最佳化

Rolle 定理

Rolle 定理：

若 $y = f(x)$ 滿足 $f(a) = f(b) = 0$，其中 $a < b$，則必有一點 ξ, $a < \xi < b$ 且 $f'(\xi) = 0$



平均值定理及應用

平均值定理：

考慮 $[a, b] \subset f(x)$ 的定義域，則必有一點 ξ，$a < \xi < b$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

例： 說明 $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

$$\frac{\sin a - \sin b}{a - b} = \cos \xi$$

$$\Rightarrow |\sin a - \sin b| = |\cos \xi||a - b| \leq |a - b|$$

反導函數與不定積分

反導函數定義：

若 $F(x)$ 滿足 $F'(x) = f(x)$，我們稱 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導函數。

例 1. $\frac{x^2}{2}$ 是 x 的反導函數，$\frac{x^2}{2} + 1$ 也是 x 的反導函數。

例 2. $\sin x$ 是 $\cos x$ 的反導函數，$\sin x + 1$ 也是 $\cos x$ 的反導函數。

反導函數與不定積分

引理

若 $g(x)$ 定義在 (a,b) 上，且對任意 $x \in (a,b)$，$g'(x) = 0$，則 $g(x)$ 是常數函數。

性質

若 $f(x)$ 定義在 (a,b) 上，且 $F_1(x)$,$F_2(x)$ 是 $f(x)$ 的反導函數，則 $F_1(x) = F_2(x) + C$。

反導函數與不定積分

不定積分定義:

$f(x)$ 所有的只差一個常數的反導函數全體，稱為 $f(x)$ 的不定積分，以記號 $\int f(x)\,dx$ 來表示。

例 1. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

例 2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

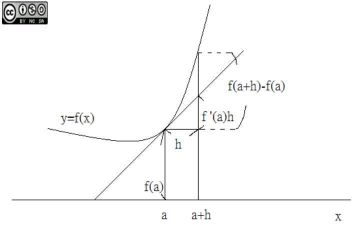
切線與線性逼近

- 線性逼近：(切線局部上可以取代 $y = f(x)$)

  切線方程式：$y = L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

  $\Rightarrow f(a+h) \approx L(a+h) = f(a) + f'(x))h$ 　當 h 很小

  或寫成 $\triangle y = f(a+h) - f(a) \approx f'(a) \triangle x$



線性逼近的其他應用

1. $(1+x)^r$ 之應用：

   在 $x=0$ 附近，

   $$(1+x)^r \approx 1+rx$$

例： $1.001^{\frac{1}{5}} = (1+0.001)^{\frac{1}{5}} \approx 1+\frac{1}{5}0.001 = 1.0002$

線性逼近的其他應用

2. 微分式：

$\triangle y \equiv f(a+h) - f(a) \approx f'(a)h = f'(a) \triangle x$

當 $\triangle y, \triangle x \to 0$ 時，

$$dy = f'(a)\, dx = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{x=a} dx$$
$$dy = \frac{dy}{dx} dx$$

例： $y = x^2$ 之微分式。

$y = x^2 \Rightarrow dy = (x^2)'dx = 2x\,dx$

0 階逼近、1 階逼近與誤差

- $f(x) =$ 零階逼近式 $+$ 誤差 $= f(a) + E_0(x)$

  其中 $E_0(x)$ 表示此 0 階逼近的誤差。
- 零階誤差表示法：(這就是平均值定理)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \Big(f(a)\Big) + \Big(f'(\xi)(x-a)\Big) \\
&= \Big(\text{ 0 階逼近 }\Big) + \Big(\text{ 誤差}E_0(x)\Big)
\end{aligned}
$$

- 一階誤差表示法：(第四章會證明)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \Big(f(a) + f'(a)(x-a)\Big) + \Big(\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2\Big) \\
&= \Big(\text{ 一階逼近 }\Big) + \Big(\text{ 誤差}E_1(x)\Big)
\end{aligned}
$$

Outline

導數

連鎖法則與反函數的導數

隱函數微分

平均值定理

描述函數的圖形

微分的應用-最佳化

函數起伏-遞增、遞減與極值

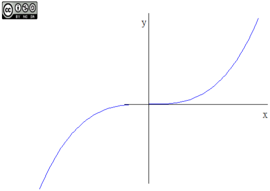
定義 (遞增、遞減與極值)：

(1) (圖 (a)) 如果對任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $x_1 > x_2$,$f(x)$ 滿足 $f(x_1) > f(x_2)$，我們說 $f(x)$ 在 (a, b) 上遞增 (起)。

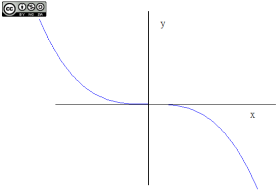
(2) (圖 (b)) 如果對任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $x_1 > x_2$, $f(x)$ 滿足 $f(x_1) < f(x_2)$，我們說 $f(x)$ 在 (a, b) 上遞減 (伏)。

(3) (圖 (c)) 如果在某點 $c \in (a, b)$ 附近的函數值都大於 $f(c)$，則 $f(c)$ 稱為 $f(x)$ 的極小值 (谷底)；反之若在 c 附近點的函數值都小於 $f(c)$，則 $f(c)$ 稱為極大值 (峰頂)。

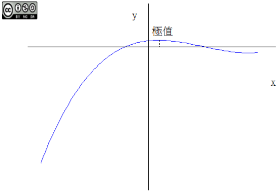
函數圖形-遞增、遞減與極值



(a) 遞增函數圖形



(b) 遞減函數圖形



(c) 極值的函數圖形

判斷極值的性質

性質 1：

$f(x)$ 在 (a,b) 上，若 $f'(x)>0$ 則 $f(x)$ 遞增；若 $f'(x)<0$ 則 $f(x)$ 遞減。因此若 $f(c)$ 是極值則 $f'(c)=0$。

性質 2 (極值的一階測試)：

若在點 c 附近 $f'(x)$ 滿足

$$(1)\begin{cases} f'(x)>0, & \text{當}x>c \\ f'(x)<0, & \text{當}x<c \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathrm{f(c)}\text{ 為極小值}$$

$$(2)\begin{cases} f'(x)<0, & \text{當}x>c \\ f'(x)>0, & \text{當}x<c \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathrm{f(c)}\text{ 為極大值}$$

判斷極值的性質

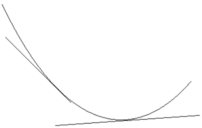
性質 3 (極值的二階測試)：

$$\begin{cases} 若 f'(c)=0 且 f''(c)>0,\ 則 f(c) 是極小值。\\ 若 f'(c)=0 且 f''(c)<0,\ 則 f(c) 是極大值。\\ 若 f''(c)=0\ 時,\ 無法判斷。\end{cases}$$

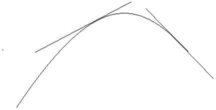
圖形起伏的難易-凹性與反曲點

函數 $f(x)$，點 $(a, f(a))$，二階導數 $f''(a)$。

- (圖 (a)) 若 $f''(a) > 0$，則稱為 $f(x)$ 在 a 點是凹向上的。
- (圖 (b)) 若 $f''(a) < 0$，則稱為 $f(x)$ 在 a 點是凹向下的。
- 若 $f''(a) = 0$ 或不存在，且在 $x = a$ 兩邊的凹性相反，則稱 $(a, f(a))$ 為 $f(x)$ 的反曲點。



(a) $f''(a) > 0$，凹向上



(b) $f''(a) < 0$，凹向下

漸近線

(1) 水平漸近線：

若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ 或 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$，則 $f(x)$ 有水平漸近線 $y = L$ 或 $y = M$。一個函數頂多只有兩條水平漸近線。

(2) 垂直漸近線：

當 x 靠近 a 點時，函數值會趨近於 ∞ 或 $-\infty$ ，則 $x = a$ 為 $f(x)$ 的垂直漸近線。一個函數可能有非常多條垂直漸近線。

(3) 斜漸近線：

假設斜漸近線存在，若 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (mx + k) = 0$，則稱為 $y = mx + k$ 為 $f(x)$ 的斜漸近線。換句話說，當 x 趨近 $\pm\infty$，$f(x)$ 會越來越靠近一斜漸近線 $y = mx + k$。一個函數頂多只有兩條斜漸近線。

描繪函數

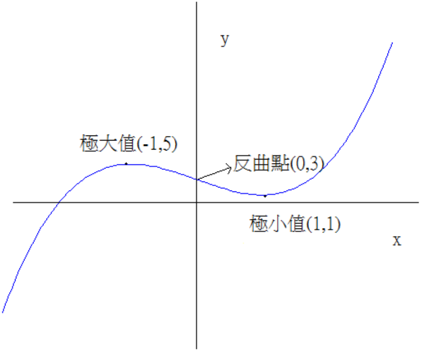
描繪函數技巧要點：

(1) 對稱性。
(2) 遞增或遞減。
(3) 極值。
(4) 凹性。
(5) 反曲點。
(6) 漸近線。
(7) x 截距與 y 截距。

描繪函數例子-1

作圖： $y = x^3 - 3x + 3$

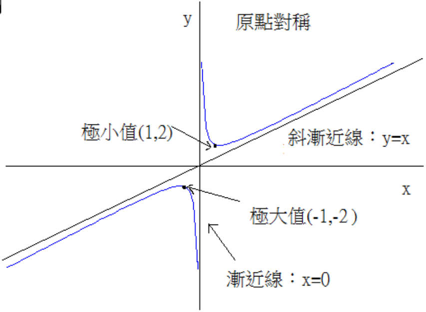
(請見課堂說明。)



描繪函數例子-2

作圖： $y = x + 1/x$

(請見課堂說明。)



Outline

導數

連鎖法則與反函數的導數

隱函數微分

平均值定理

描述函數的圖形

微分的應用-最佳化

應用問題討論-1

例 1. 討論 $f(x) = x^3 - x$ 極大極小值。

$f'(x) = 3x^2 - 1$，所以 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 為候選點，藉由一階二階判定測試。

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \qquad \text{為極小值}$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \qquad \text{為極大值}$$

應用問題討論-1

在以下 x 的範圍，$f(x)$ 最大最小值。

(1) 在 $x \in [-1, 1]$，$f(-1) = f(1) = 0$，所以最大值 $= \frac{2}{\sqrt{3}}$，最小值 $= -\frac{2}{\sqrt{3}}$。

(2) 在 $x \in [-2, 2]$，$f(-2) = f(2) = 6$，所以最大值 $= 6$，最小值 $= -6$。

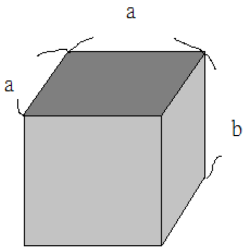
(3) 在 $x \in (-2, 2)$，$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 6$ 和 $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -6$，但是函數

在此限定區間無法達到其極限值，所以最大和最小不存在。

(4) 在 $x \in \mathbb{R}$，$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ 和 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$，所以最大和最小不存在。

應用問題討論-2

例 2. 欲設計一長方體牛奶盒 (如圖)，體積固定為 2000 立方公分，上下底為正方形，且正方形材質之成本為側邊長方形材質成本之 2 倍，請問底部正方形的邊長與牛奶盒高應為多少，才能使花費的成本最少？



應用問題討論-2

說明：

設底正方形邊長為 a 公分，高為 b 公分，並設側邊長方形單位面積之成本為 λ 元/公分^2 。

(1) 總成本 $= \lambda \cdot 4ab + (2\lambda) \cdot 2a^2 = 4\lambda(a^2 + ab)$

(2) 體積 $= a^2 b = 2000$。

總成本函數為

$$C(a) = 4\lambda(a^2 + \frac{2000}{a}) \qquad a > 0$$

$$\Rightarrow C'(a) = 4\lambda(2a - \frac{2000}{a^2}) = 0 \Rightarrow a = 10$$

由一階二階測試得知：$C''(10) > 0$ 極小值。

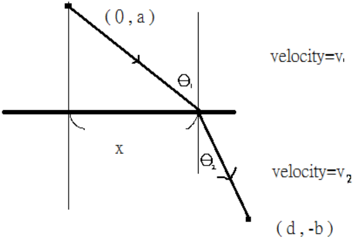
$\Rightarrow a = 10$，$b = 20$。

應用問題討論-3

例 3. 費馬原理 (Fermat Principle)

「光所遵循的路徑是最節省時間的路徑」稱為費馬原理。

光所走的路徑如圖所示：



應用問題討論-3

說明：

令所花的時間為 $T(x)$

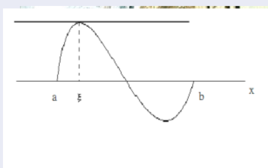
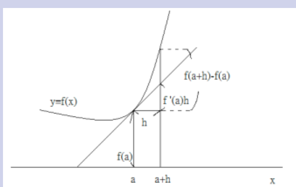
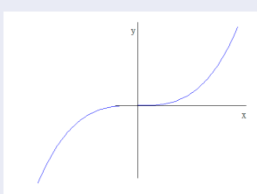
$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_2}$$

$$T'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{1}{v_1}-\frac{(d-x)}{(d-x)^2+b^2}\cdot\frac{1}{v_2}=0$$

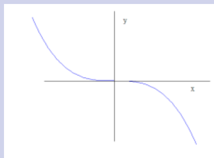
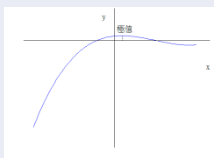
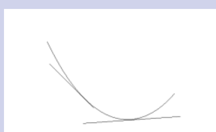
$$\Rightarrow T'(x)=0 \quad (\text{費馬原理})$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2} \ (\text{折射原理})$$

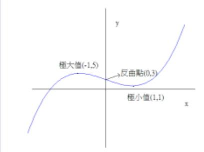
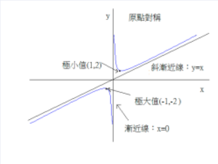
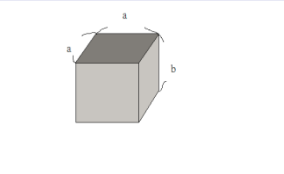
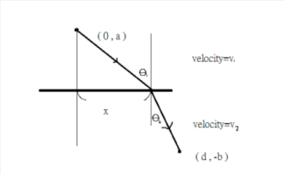
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
1、46-48			轉載自Microsoft Office 2010 PowerPoint 設計主題範本 本作品依據 Microsoft 服務合約及著作權法第46、52、65條合理使用。
20			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
25			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
31			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
31			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
31			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
34			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
34			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
37			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
38			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
42			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
44			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。