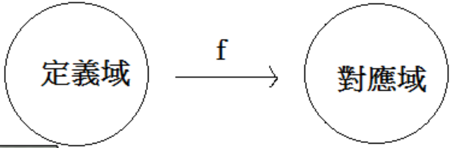
第一章：基本函數與極限

翁秉仁 教授

Outline

函數定義



函數必須滿足兩個條件：

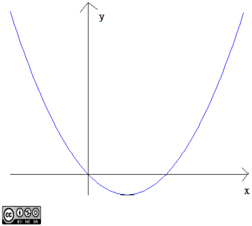
(1) 在定義域中的每一元素只能對應一個函數值 (即不能一對多)，因此垂直於 $x-$ 軸的直線與函數圖形的交點不能超過兩點。

(2) 定義域中的每一元素都都必須有對應的函數值。

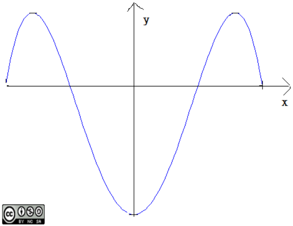
單變數：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

多項式函數：

$$y = f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$



(a) $y = x^2 - 2x$

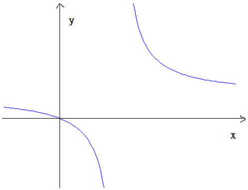


(b) $y = -(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

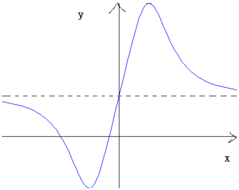
單變數：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

有理函數：

$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 為多項式函數。



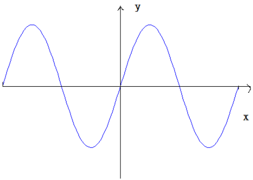
(a) $y = \frac{2x}{x-1}$



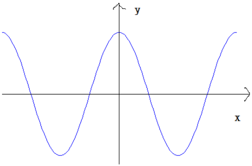
(b) $y = 1 + \frac{x}{x^4+1}$

單變數：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

三角函數：

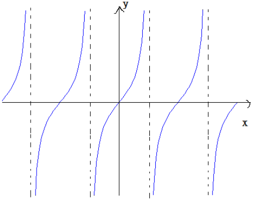


(a) $y = \sin x$

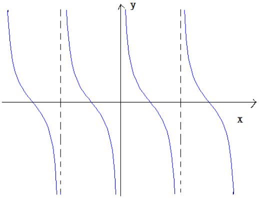


(b) $y = \cos x$

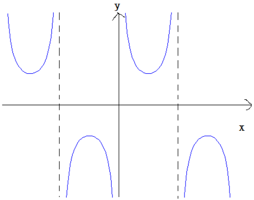
單變數：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



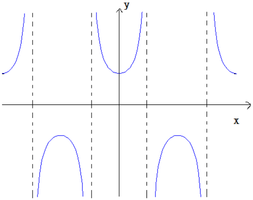
(a) $y = \tan x$



(b) $y = \cot x$



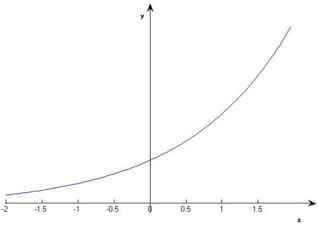
(c) $y = \csc x$



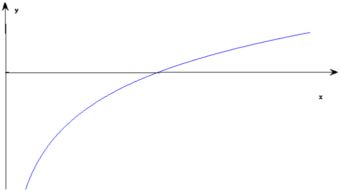
(d) $y = \sec x$

單變數：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

基本的指數和對數函數圖形：



(a) $y = 2^x$

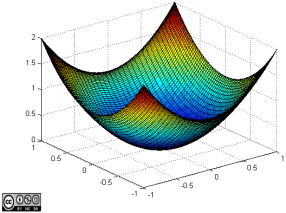


(b) $y = \log_{10}(x)$

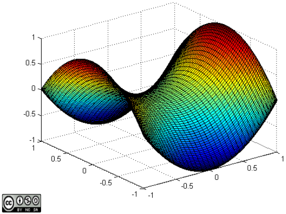
多變數：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

雙變數函數 $(n = 2)$：

$z = f(x, y)$



(a) $z = x^2 + y^2$



(b) $z = x^2 - y^2$

多變數：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

多變數函數：

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

例：

$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(空間一點與原點的距離)

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

(平均值)

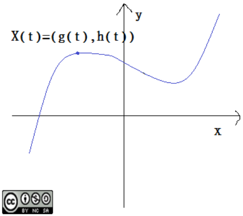
參數式：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

參數式：

$X(t) = (a + \alpha t, b + \beta t)$ （平面直線參數式）

$X(t) = (a + \alpha t, b + \beta t, c + \gamma t)$ （空間直線參數式）

$X(t) = (\cos t, \sin t)$ （單位圓的參數式）



數列：$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

數列：

a_n 數列表示為 $a_n = f(n), n = 1, 2, 3, 4 \ldots$

例： $a_n = n$

$a_n = \frac{-1}{n}$

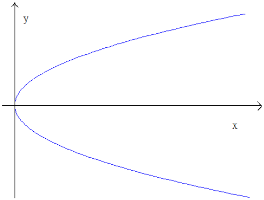
Outline

平面曲線

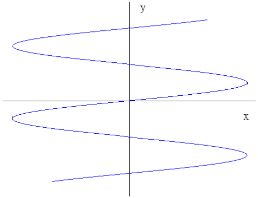
敘述：

常見的平面曲線圖形通常可以用：$F(x, y) = C$，C 為常數來表示。$F(x, y) = C$ 的圖形就是 $\mathbb{R}^2$ 中所有滿足方程式 $F(x, y) = C$ 的點。

例：

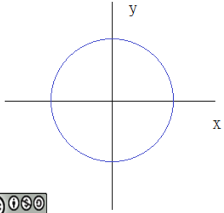


(a) $x = y^2$

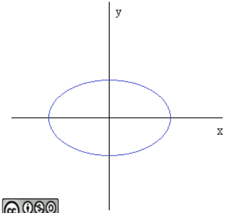


(b) $x = \sin y$

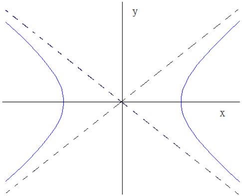
二次曲線



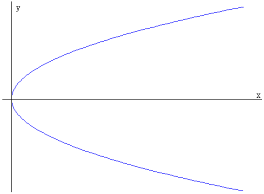
(a) $x^2 + y^2 = 1$



(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



(c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

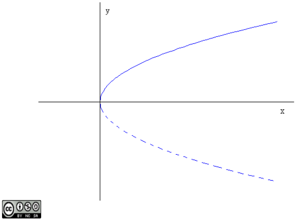


(d) $y^2 = 4cx$

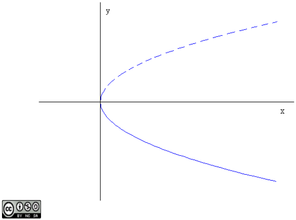
隱函數

$F(x, y) = C$ 的圖形可以逐段拆解成一些函數圖形的組合。這些函數 $y = f_i(x)$ 不見得可寫出明顯的函數公式，因此稱為隱函數，並滿足 $F(x, f_i(x)) = C$。

例： $y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$



(a) $y = \sqrt{x}$



(b) $y = -\sqrt{x}$

方程式圖形的對稱性

當函數 $F(x,y)$ 有一些特別性質時，它對應的圖形

$$\Gamma \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | F(x,y) = C\right\}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

就會具備一些對稱性。

性質：

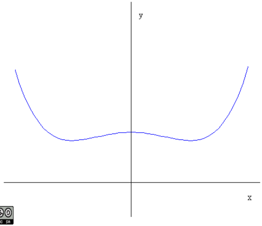
(1) $F(x,y) = F(x,-y) \Rightarrow \Gamma$ 對 x-軸對稱。
(2) $F(x,y) = F(-x,y) \Rightarrow \Gamma$ 對 y-軸對稱。
(3) $F(x,y) = F(-x,-y) \Rightarrow \Gamma$ 對原點對稱。
(4) $F(x,y) = F(y,x) \Rightarrow \Gamma$ 對 $y = x$ 對稱。

註：反敘述並不成立。

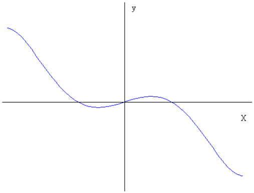
補充內容

1. 如果 $f(x)$ 滿足$f(-x)=f(x)$，$f(x)$ 稱為偶函數，且 $f(x)$ 函數圖形對稱 y-軸。
2. 如果 $f(x)$ 滿足$f(-x)=-f(x)$，$f(x)$ 稱為奇函數，且 $f(x)$ 函數圖形對稱原點。

例：



(a) 偶函數：$y=x^4-2x^2+6$



(b) 奇函數：$y=x^5-7x^3+4x$

outline

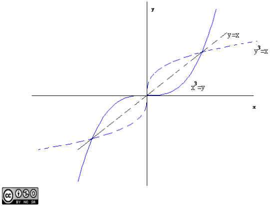
反函數定義

定義：

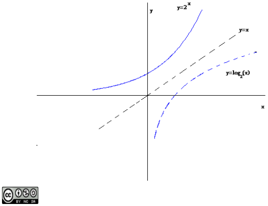
兩函數 $f(x), g(x)$ 如果滿足 $f(g(x)) = x$ 且 $g(f(x)) = x$ 則稱 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函數。

註：反函數的圖形與原函數圖形對稱 $y = x$。

例：



(a) $y = x^3 \Longleftrightarrow y = x^{\frac{1}{3}}$

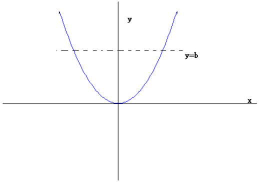


(b) $y = 2^x \Longleftrightarrow y = log_2(x)$

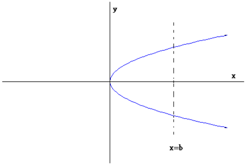
反運算例子

$y = x^2 \Rightarrow$ 反函數為$x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$ 正確嗎?

(詳情請見課堂說明。)



(a) $y = x^2$



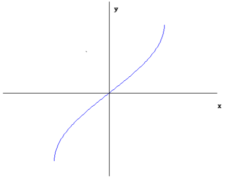
(b) $x = y^2$

Outline

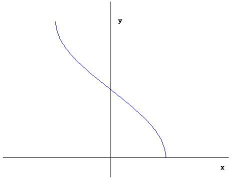
反三角函數的定義域與值域

$$
\begin{array}{lccl}
\sin^{-1} x: & [-1,1] & \to & \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\
\cos^{-1} x: & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\
\tan^{-1} x: & \mathbb{R} & \to & \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\
\cot^{-1} x: & \mathbb{R} & \to & [0,\pi] \\
\sec^{-1} x: & (-\infty,-1]\bigcup[1,\infty) & \to & \left[0,\frac{\pi}{2}\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right] \\
\csc^{-1} x: & (-\infty,-1]\bigcup[1,\infty) & \to & \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\bigcup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]
\end{array}
$$

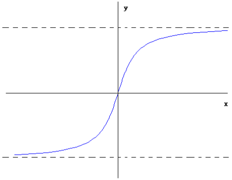
反三角函數的圖形



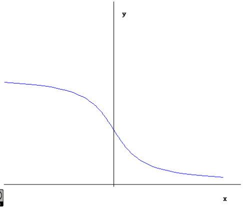
(a) $y = \sin^{-1} x$



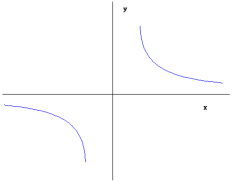
(b) $y = -\cos^{-1} x$



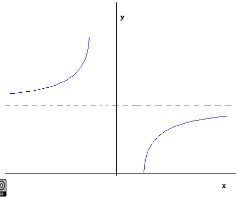
(c) $y = -\tan^{-1} x$



(d) $y = \cot^{-1} x$



(e) $y = -\csc^{-1} x$



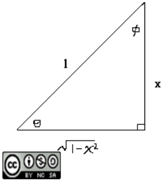
(f) $y = -\sec^{-1} x$

反三角試算例子

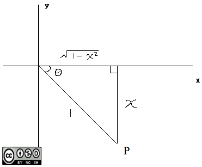
例： 計算 $\cos(\sin^{-1} x)$。

1. (圖 (a) 正常角)，即 $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$
$$\cos(\sin^{-1} x) = \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$$
2. (圖 (b) 廣義角)，即 $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq 0$
$$\cos(\sin^{-1} x) = \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$$

(詳情請見課堂說明。)



(a) 正常角



(b) 廣義角

Outline

連續函數

$f(x)$ 是連續函數，必須滿足對定義域中的每一點 a，在 a 附近的點都會對應到 $f(a)$ 的附近。

已知事實：我們所熟悉的基本函數在有定義的地方都是連續函數。

例：

$f(x) = 2x$ 是連續函數。

$f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x \neq 0$ 時連續。

數列的極限

給定一數列 a_n， $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 或數列 a_n 的極限為 L

的意思是 「隨著n 變大，a_n 終究會落到L 的附近。」

例：

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$a_n = n$，則 a_n 極限為無窮大或沒有極限。

$a_n = (-1)^n$，則 a_n 沒有極限。

夾擊法或三明治法

夾擊法或三明治法：

若 $c_n \leq a_n \leq b_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, 其中 a 是常數，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

例：

$$a_n = \frac{\sin n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

極限四則運算

性質：

設 L、M 是實數，若 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$，$\lim_{n\to\infty} b_n = M$，則

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L \pm M$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot M$

(3) 如果 $M \neq 0$，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$

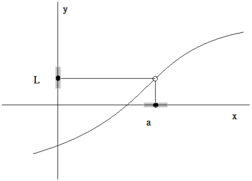
(4) 若 $f(x)$ 在 L 連續，則 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$

函數的極限

函數 $f(x)$ 在 x 逼近 a 有極限 L，記為 $\lim_{x \to a} f(x) = L$，其意義為「 在a 附近的點x(不包含a), 其函數值$f(x)$ 都會落到L的附近。」

性質：

若 $f(x)$ 在 a 點連續，則 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$。



函數極限的四則運算與例子

性質：

設 a、L、M 是實數，若 $\lim_{x\to a} f(x) = L$，$\lim_{x\to a} g(x) = M$，則

(1) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

(2) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

(3) 若 $M \neq 0$，$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

(4) 若 $h(x)$ 在 L 連續 $\Rightarrow \lim_{x\to a} h(f(x)) = h(L)$

函數極限之例子

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 是重要的函數極限。

例： $f(x) = x^2$

說明：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} x+a = 2a$$

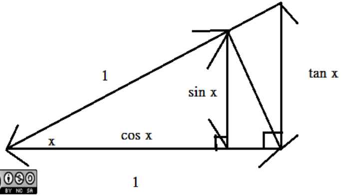
函數極限之例子

例： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

說明：

$$\because \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x \le \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x \le \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$



(詳情請見課堂說明。)

函數極限之例子

3. 右極限 $\lim_{a\to a^+} f(x)$ 和左極限 $\lim_{a\to a^-} f(x)$。

例： $f(x)=\sqrt{x}$

說明：

$\lim_{a\to 0^+}\sqrt{x}=0$ 但是 $\lim_{a\to 0^-}\sqrt{x}$ 不存在。

4. 無窮遠的極限 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L$。

例：

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$ 和 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-1$。

Outline

自然數 e

1. $e \equiv \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在。(請見課堂說明)

   註：$e \approx 2.71828$

2. 其他 e 相關極限的形式：

   (1) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}$

   (2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

   (3) $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

自然指數與對數函數

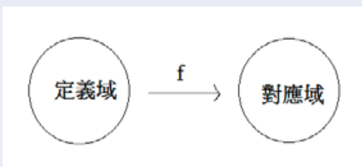
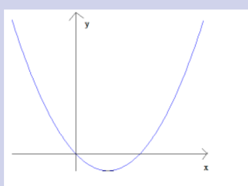
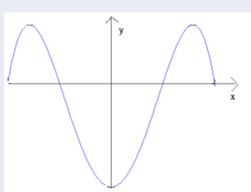
說明：

以 e 為底的指數函數 e^x 稱為自然指數函數。以 e 為底的對數函數 $\log_e x$ 稱為自然對數函數。後者通常記為 $\ln x$。

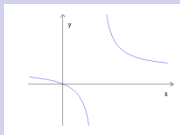
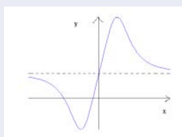
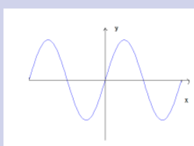
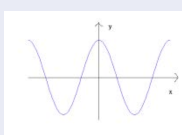
自然對數極限例子：

例： $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=1$ (見課堂說明)

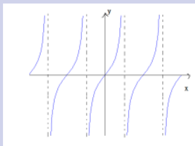
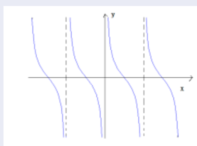
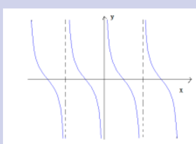
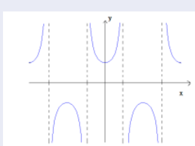
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
1、39-49			轉載自Microsoft Office 2010 PowerPoint 設計主題範本 本作品依據 Microsoft 服務合約及著作權法第46、52、65條合理使用。
3			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
4			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
4			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

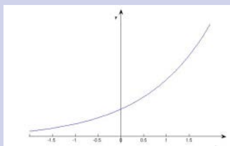
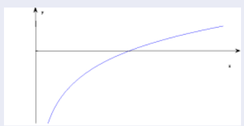
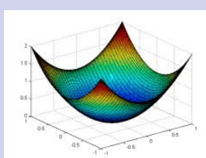
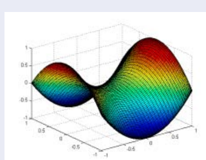
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
5		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
5		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
6		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
6		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

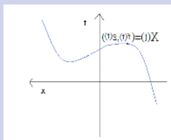
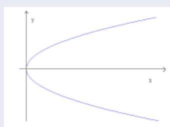
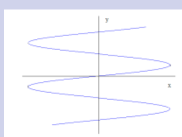
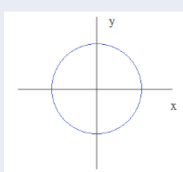
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
7			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
7			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
7			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
7			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

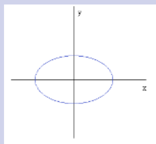
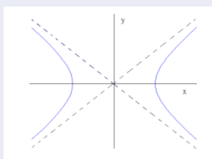
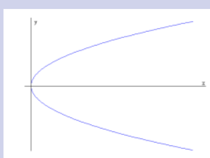
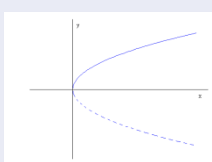
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
8		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
8		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
9		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
9		BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

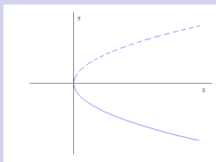
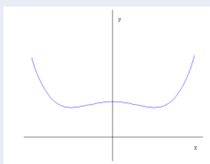
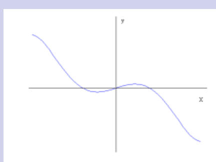
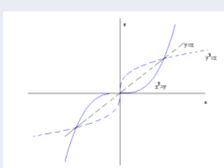
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
11			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
14			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
14			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
15			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

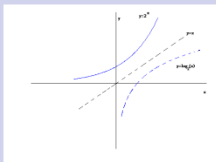
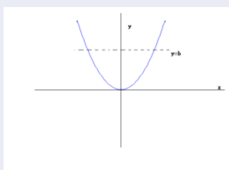
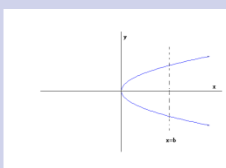
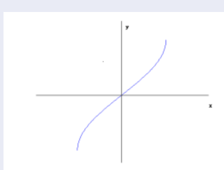
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
15			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
15			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
15			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
16			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

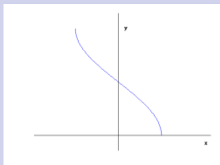
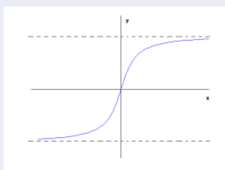
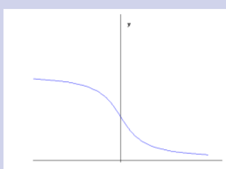
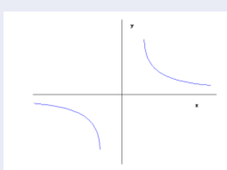
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
16			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
18			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
18			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
20			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

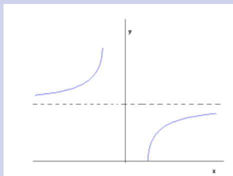
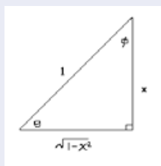
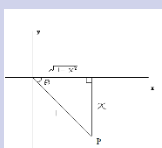
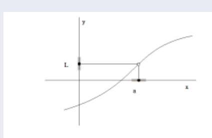
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
20		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
21		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
21		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
24		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

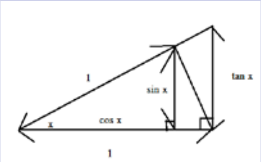
版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
24			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
24			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
24			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
24			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
24		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
25		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
25		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
31		CC BY NC SA	作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
34			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。