# 八、假說檢定 II (Hypothesis Testing II) (Chapter 8)

國立台灣大學農藝學研究所生物統計組
國立台灣大學流行病學與預防醫學研究所
國家衛生研究院生物統計與生物資訊組
劉仁沛教授
jpliu@ntu.edu.tw

# 假說檢定 (Hypothesis Testing II )

- 小樣品均值檢定
- 單樣品比例檢定
- 二個樣品均值比較之推論
  - 相依樣品 (Paired Samples)
  - 獨立樣品 (Independent Samples)
  - 樣品數決定
- 二獨立樣品比例比較之推論
- 變方推論 (Inference for Variance)

# 小樣品均值檢定

在大樣品 (n≧30)

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$ 的分佈為標準常態分佈

但小樣品 (n < 30)

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$ 之分佈並非為標準常態分佈

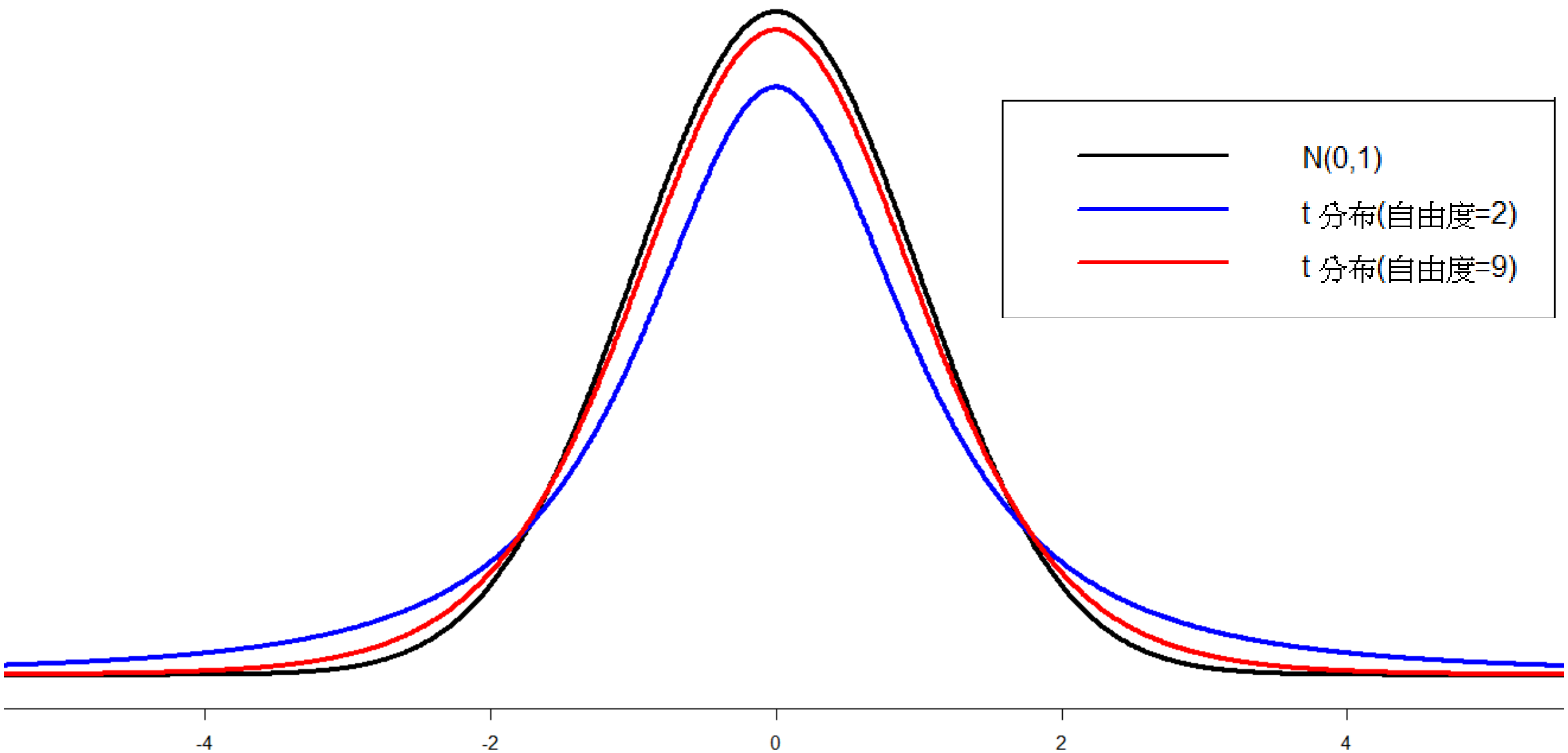
# 小樣品均值檢定

- 1908 年，在愛爾蘭都柏林 Guiness 啤酒廠工作的 William Sealy Gosset 因研究啤酒品質的需要導出 t 的分佈，並以其 Student 筆名發表於 Biometrika 統計期刊（公司禁止員工發表任何研發成果）故此分佈又稱 Student-t 分佈。

# 性質

1. 對稱於 0 。
2. 與自由度有關 (n-1) 。
3. 長尾
4. 自由度大時 t 分佈趨近於標準常態分佈

見 P.485-486 附表 5 。






# v=2,9 之 t 分布與標準常態分布圖

- 單尾檢定

$H_0: \mu \geqq \mu_0$ vs. $H_a: \mu < \mu_0$

- 決策方法：顯著水準＝ $\alpha$

(1) $$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha, n-1}$$ 拒絕 $H_0$

(2) $$P\text{-}value = P[T < t \mid \mu = \mu_0] < \alpha$$ 拒絕 $H_0$

(3) $$U = \bar{x} + t_{\alpha, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu_0$$ 拒絕 $H_0$

- 樣本數 $$n = \frac{\sigma^2}{(\mu_a - \mu_0)^2}\left[t_{\alpha, n-1} + t_{\beta, n-1}\right]^2$$

- 單尾檢定

$H_0{:}\mu \leqq \mu_0$ vs. $H_a{:}\mu > \mu_0$

- 決策方法：顯著水準＝ α

(1) $T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha,n-1}$ 拒絕 $H_0$

(2) $P\text{-}value = P[T > t \mid \mu = \mu_0] < \alpha$ 拒絕 $H_0$

(3) $L = \bar{x} - t_{\alpha,n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}} > \mu_0$ 拒絕 $H_0$

- 樣本數 $n = \dfrac{\sigma^2}{(\mu_a - \mu_0)^2}\left[t_{\alpha,n-1} + t_{\beta,n-1}\right]^2$

- 雙尾檢定

  H$_0$:$\mu = \mu_0$ vs. H$_a$: $\mu \neq \mu_0$

- 決策方法：顯著水準＝ α

(1) $$|T| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2,n-1}, \text{拒絕H}_0$$

(2) $$P\text{-}value = P\left[|T| > t \,\middle|\, \mu = \mu_0\right] < \alpha,\ \text{拒絕} H_0$$

(3) $$L = \bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} > \mu_0 \ \text{或}\ U = \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu_0 \ \text{拒絕} H_0$$

- 樣本數 $n = \dfrac{\sigma^2}{(\mu_a - \mu_0)^2}\left[t_{\alpha/2,n-1} + t_{\beta,n-1}\right]^2$

- 例：某速食品防腐劑含量 3,4,5,4,2 ppm. 消基會是否可證明此速食食品防腐劑含量高於政府所定國家標準 3ppm.
- $H_0$ ：$\mu = 3\text{ppm}(= \mu_0)$ vs. $H_a$ ： $\mu > 3\text{ppm}$

$$\bar{x} = 3.6 \quad S^2 = 1.3 \quad n = 5 \quad \alpha = 0.05$$

$$T = \frac{3.6 - 3.0}{\sqrt{1.3/5}} = 1.1765$$

$$t_{0.05,4} = 2.132 (\text{附表}5)$$

$$\mathrm{T} = 1.1765 < 2.132 \quad \text{無法拒絕} H_0$$

- 95 %信賴下限

$$L=\bar{x}-t_{0.05,4}\frac{s}{\sqrt{n}}=3.6-(2.132)\sqrt{\frac{1.3}{5}}=2.36<3$$

無法拒絕 $H_0$

- 95 %信賴區間

$$L=\bar{x}-t_{0.025,4}\frac{s}{\sqrt{n}}=3.6-(2.776)\sqrt{\frac{1.3}{5}}=2.1842$$

$$U=\bar{x}+t_{0.025,4}\frac{s}{\sqrt{n}}=3.6+(2.776)\sqrt{\frac{1.3}{5}}=5.0160$$

$3\ ppm\in(2.1842,\ 5.0160)$

$\Rightarrow$ 無法拒絕$H_0:\mu=3$ppm(雙尾檢定)

例：標準治療肺癌病人 3 年內的存活率為 0.10 。現有 150 肺癌病人接受一種新的試驗療法， 3 年內共 24 位存活 (126 位死亡 )

問題：新的療法是否可改善肺癌病人 3 年內的存活率？

$n$個體(癌症病人)

$x$個成功個數(存活)

成功比例(存活率) : $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$

$\hat{p}$的變方: $\dfrac{P(1-P)}{n}$

$\hat{p}$的標準偏差: $\sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}}$

# 單樣品比例檢定

- 單尾檢定 $H_0$： $P \geqq P_0$ vs. $H_a$： $P<P_0$
- 決策方法：

1. $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} < -Z_{1-\alpha}$ 拒絕 $H_0$

2. $P\text{-}value = P\left[Z < z \mid P = P_0\right] < \alpha$ 拒絕 $H_0$

# 單樣品比例檢定

- 單尾檢定 $H_0$： $P \leqq P_0$ VS. $H_a$： $P > P_0$
- 決策方法：

1. $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} > Z_{1-\alpha}$ 拒絕 $H_0$

2. $P\text{-}value = P[Z > z \mid P = P_0] < \alpha$ 拒絕 $H_0$

# 單樣品比例檢定

- 雙尾檢定 $H_0$： $P=P_0$ VS. $H_a$： $P \neq P_0$

1. $$|Z| = \left| \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right| > Z_{1-\alpha/2}$$ 拒絕 $H_0$

2. $$P\text{-}value = P\left[\,|Z| > z \mid P = P_0\,\right] < \alpha$$ 拒絕 $H_0$

$(1-\alpha)$%信賴區間 $\hat{p} \pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$

- 例 ( 續 )

$$H_0: P \le 0.1 \quad vs \quad H_a: \mathrm{P} \ge 0.1$$

$$\mathrm{P}_0 = 0.1, \quad \mathrm{X} = 24, \quad \mathrm{n} = 150$$

$$\hat{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}} = \frac{24}{150} = 0.16$$

$$\hat{\mathrm{p}}\text{的變方} = \frac{\mathrm{p}_0(1-\mathrm{p}_0)}{\mathrm{n}} = \frac{(0.1)(1-0.1)}{150} = 0.0006$$

$$Z = \frac{\hat{\mathrm{p}} - \mathrm{p}_0}{\sqrt{\frac{\mathrm{p}_0(1-\mathrm{p}_0)}{\mathrm{n}}}} = \frac{0.16 - 0.1}{\sqrt{0.0006}} = \frac{0.06}{0.02449}$$

$$= 2.45 > Z_{0.95} = 1.645 \quad reject \quad H_0$$

新藥可改善肺癌病人的3年存活

# 兩個樣品均值比較之推論

今欲比較洗腎病人透析前後之體重是否不同 ,6 位病人腎臟透析前後體重如下表 (Source: 沈明來 (2007) 生物統計學入門，第五版，九州 )

| 透析前體重 $X_1$ | 透析後體重 $X_2$ | 差異 |
|---|---|---|
| 53.2 | 48.0 | 5.2 |
| 73.0 | 69.6 | 3.4 |
| 61.8 | 57.2 | 4.6 |
| 43.4 | 41.6 | 1.8 |
| 52.9 | 51.8 | 1.1 |
| 62.8 | 59.6 | 3.2 |
| 和 347.1 | 327.8 | 19.3 |
| 均值 57.85 | 54.6333 | 3.2167 |

# 兩個樣品均值比較之推論

有 A、 B 兩種嬰兒奶粉， A 奶粉試用 9 位初生男嬰， B 奶粉試用 10 位男嬰，則一個月後兩組嬰兒增重 ( 磅 ) 情形如下表

(Source: 沈明來 (2007) 生物統計學入門，第五版，九州 )

| 編號 | A 奶粉嬰兒增重 | B 奶粉嬰兒增重 |
|---|---|---|
| 1 | 6.9 | 6.4 |
| 2 | 7.6 | 6.7 |
| 3 | 7.3 | 5.4 |
| 4 | 7.6 | 8.2 |
| 5 | 6.8 | 5.3 |
| 6 | 7.2 | 6.6 |
| 7 | 8.0 | 5.8 |
| 8 | 5.5 | 5.7 |
| 9 | 7.3 | 6.2 |
| 10 | | 7.1 |
| 合計 | 64.2 | 63.4 |
| 平均 | 7.13 | 6.34 |

- 洗腎病人透析先後體重變化係指同一位病人在透析先後的體重變化（才有意義）
- 同一位病人透析先後之體重，
  均測量自同一病人（試驗單位）
- 同一病人二次體重是配對的 (Paired)，
  而具有相關性→配對樣品 (Paired Samples)
- 同一試驗單位在不同環境所得之觀測值均為
  配對樣品
  有氧舞蹈前後心跳的變化
  服用降血壓藥前後收縮壓之變化

- A.B 兩種嬰兒奶粉，

吃 A 奶粉的 9 位男嬰與吃 B 奶粉的 10 位男嬰是不同

- 吃 A 奶粉 9 位男嬰體重增加之觀測值
  與吃 B 奶粉 10 位男嬰體重增加之觀測值
  是無關→獨立樣品 (Independent Samples)

痛風病人與正常人血液中尿酸含量

兩個不同水稻品種每公頃的產量。

# 配對樣品均值比較之推論

- 假定 $D_i$ 為常態分佈，資料結構

| 試驗單位 | 樣品 1($X_{1i}$) | 樣品 2($X_{2i}$) | 差 ($D_i$=$X_{1i}$-$X_{2i}$) |
|---|---|---|---|
| 1 | $X_{11}$ | $X_{21}$ | $D_1=X_{11}-X_{21}$ |
| 2 | $X_{12}$ | $X_{22}$ | $D_2=X_{12}-X_{22}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $i$ | $X_{1i}$ | $X_{2i}$ | $D_i=X_{1i}-X_{2i}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| n | $X_{1n}$ | $X_{2n}$ | $D_n=X_{1n}-X_{2n}$ |
| 平均 | | | $\bar{D}$ |
| 變方 | | | $S^2_D$ |

# 配對樣品均值比較之推論步驟

1.對每一試驗單位計算配對觀測值的差

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}$$

將配對樣品轉換成單一樣品

2.根據$D_i$計算其樣品平均值

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - X_{2i}) = \overline{X_1} - \overline{X_2}$$

3.根據$D_i$計算其樣品變方

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} D_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} D_i\right)^2}{n}\right]$$

4.根據$\overline{D}$及$S_D^2$進行單一樣品均值檢定。

- 雙尾檢定

  $H_0$:$\mu_1$=$\mu_2$ vs. $H_a$: $\mu_1 \neq \mu_2$

- 決策：

(1) $$|T| = \left|\frac{\overline{D}}{s_D/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2,n-1}$$,拒絕$H_0$

(2) $$P\text{-}value = P\left[|T| > t\right] < \alpha$$，拒絕$H_0$

(3)

$$L = \overline{D} - t_{\alpha/2,n-1}\, s_D\big/\sqrt{n} > 0$$ 或

$$U = \overline{D} + t_{\alpha/2,n-1}\, s_D\big/\sqrt{n} < 0$$ 拒絕$H_0$

- 單尾檢定

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ vs. $H_a: \mu_1 > \mu_2$

- 決策

(1) $$T = \frac{\overline{D}}{s_D / \sqrt{n}} > t_{\alpha, n-1}$$ 拒絕 $H_0$

(2) $$P\text{-}value = P[T > t] < \alpha$$ 拒絕 $H_0$

(3) $$L = \overline{D} - t_{\alpha, n-1} s_D / \sqrt{n} > 0$$ 拒絕 $H_0$

- 單尾檢定

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ vs. $H_a: \mu_1 < \mu_2$

- 決策

(1) $T = \dfrac{\overline{D}}{s_D / \sqrt{n}} < -t_{\alpha, n-1}$ 拒絕 $H_0$

(2) $P\text{-}value = P[T < t] < \alpha$ 拒絕 $H_0$

(3) $U = \overline{D} + t_{\alpha, n-1} s_D / \sqrt{n} < 0$ 拒絕 $H_0$

# 例：病人腎臟透析前後體重之差異



$$\overline{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{19.3}{6} = 3.2167$$

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - \frac{\left(\sum D_i\right)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{6-1}\left[5.2^2 + \ldots + 3.2^2 - \frac{(19.3)^2}{6}\right] \qquad \begin{aligned} &= 12.3683/5 \\ &= 2.47366 \end{aligned}$$

$$T = \frac{\overline{D}}{\sqrt{s_D^2 / n}} = \frac{3.2167}{\sqrt{\frac{2.47366}{6}}} = 5.0097$$

雙尾檢定 $H_0: \mu_B = \mu_A \ vs\ H_a: \mu_B \neq \mu_A, \ \alpha = 0.05$

$|T| = 5.0097 > t_{0.025,5} = 2.571$ 拒絕 $H_0$

透析前後體重有顯著差異

# 95 %信賴區間

$$L = \overline{D} - t_{0.025,5}\sqrt{\frac{s_D^{\ 2}}{n}}$$

$$= 3.2167 - 2.571\sqrt{\frac{2.47366}{6}}$$

$$= 3.2167 - 1.6508 = 1.5659$$

$$U = \overline{D} + t_{0.025,5}\sqrt{\frac{s_D^{\ 2}}{n}}$$

$$= 3.2167 + 2.571\sqrt{\frac{2.47366}{6}}$$

$$= 3.2167 + 1.6508 = 4.8675$$

$(1.5659, 4.8675)$不包括0

$\Rightarrow$ 透析前後體重有顯著差異

# 配對樣品均值比較之推論

- 當 n≧30 ，可用標準常態百分位值

$$Z_{1-\alpha/2}(\text{或}Z_{1-\alpha},\text{單尾})\text{代}t_{\alpha/2,n-1}(\text{或}t_{\alpha,n-1})$$

# 二獨立樣品均值比較之推論

假定：族群變方相同$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 族群為常態分佈

資料結構(樣品數$n_1 \neq n_2$)

| | 樣品1($X_{1j}$) | 樣品2($X_{2j}$) |
|---|---|---|
| | $X_{11}$ | $X_{21}$ |
| | $X_{12}$ | $X_{22}$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $X_{1j}$ | $X_{2j}$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $X_{1n_1}$ | $X_{2n_2}$ |
| 平均 | $\overline{x}_1$ | $\overline{x}_2$ |
| 變方 | $S_1^2$ | $S_2^2$ |

# 二獨立樣品均值比較之推論

樣品1 偏差平方和

$$SS_1 = \sum_{j=1}^{n_1} (X_{1j} - \overline{X_{1.}})^2 = \sum_{j=1}^{n_1} X_{1j}^2 - \frac{(\sum X_{1j})^2}{n_1} = (n_1 - 1) S_1^2$$

樣品2 偏差平方和

$$SS_2 = \sum_{j=1}^{n_2} (X_{2j} - \overline{X_{2.}})^2 = \sum_{j=1}^{n_2} X_{2j}^2 - \frac{(\sum X_{2j})^2}{n_2} = (n_2 - 1) S_2^2$$

樣品1與樣品2合併樣品平方和(*Pooled Sums of Squares*)

$$SSp = SS_1 + SS_2 = (n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2$$

樣品1與樣品2合併樣品變方(*Pooled Sample Variance*)

$$S_p^2 = \{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2\} / (n_1 + n_2 - 2) = (SS_1 + SS_2) / (n_1 + n_2 - 2)$$

# 兩獨立樣品平均差之抽樣分佈

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$為$\mu_1 - \mu_2$不偏估計值

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$的變方 $V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$

$$= \sigma^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \ , \ (\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$$

$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$之估計值

$$\hat{V}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} = S_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \ , \ (\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$$

# 雙尾檢定

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

1. $|T| = \left| \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \right| > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

2. $P\text{-}value = p(|T| > t) \leq \alpha \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

3. $L = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)} > 0$

或

$U = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)} < 0 \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

# 單尾檢定

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \quad vs \quad H_a: \mu_1 < \mu_2$$

1. $T = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} < -t_{\alpha, n_1+n_2-2} \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

2. $P\text{-}value = p(T < t) < \alpha \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

3. $U = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha, n_1+n_2-2}\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)} < 0 \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

# 單尾檢定

$$H_0: \mu_1 \le \mu_2 \quad vs \quad H_a: \mu_1 > \mu_2$$

1. $T = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} > t_{\alpha, n_1+n_2-2} \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

2. $P\text{-}value = p(T > t) < \alpha \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

3. $L = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha, n_1+n_2-2}\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)} > 0 \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

# 例：A、 B 兩種奶粉男嬰一個月體重增加

敘述統計量

| 樣品 | 樣品數 | 平均 | 平方和 | 變方 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $n_1=9$ | $\bar{x}_1=7.13$ | $SS_1=4.08$ | 0.5100 |
| 2 | $n_2=10$ | $\bar{x}_2=6.34$ | $SS_2=6.924$ | 0.7693 |

$$SS_p=4.08+6.924=11.004$$

$$S_p^2=\frac{11.004}{(9+10-2)}=0.64729$$

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{7.13 - 6.34}{\sqrt{0.64729\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)}}$$

$$= \frac{0.79}{0.3697}$$

$$= 2.1369$$

$$|T| = 2.1369 > t_{0.025,17} = 2.11 \quad \text{拒絕} H_0$$

A奶粉與B奶粉對男嬰每月體重增加有顯著差異

# 95%信賴區間

$$L = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{0.025,17}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

$$= 0.79 - (2.11)(0.3697)$$

$$= 0.01$$

$$U = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{0.025,17}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

$$= 0.79 + (2.11)(0.3697)$$

$$= 1.57$$

(0.01，1.57)不包括0，拒絕$H_0$

# 若族群變方不等 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$T' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

方法一：加權$t$值

$$t'_\alpha = \frac{t_{\alpha, n_1 - 1} \cdot \frac{S_1^2}{n_1} + t_{\alpha, n_2 - 1} \cdot \frac{S_2^2}{n_2}}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

方法二：加權自由度(Satterthwaite Approximation)

$$df' = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

# 雙尾檢定

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$1.\ |T'| = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \right| > t'_{\alpha/2} \Rightarrow \text{拒絕} H_0$$

或

$$2.\ |T'| = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \right| > t_{\alpha/2, df'} \Rightarrow \text{拒絕} H_0$$

# 單尾檢定

$$H_0: \mu_1 \le \mu_2 \quad vs \quad H_a: \mu_1 > \mu_2$$

1. $$T' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} > t'_\alpha \Rightarrow \text{拒絕}H_0$$

或

2. $$T' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} > t_{\alpha, df'} \Rightarrow \text{拒絕}H_0$$

# 單尾檢定

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \quad vs \quad H_a: \mu_1 < \mu_2$$

1. $T' = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} < -t'_\alpha \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

或

2. $T' = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} < -t_{\alpha, df'} \Rightarrow$ 拒絕$H_0$

# 例：痛風病人與正常人血中尿酸量之比較

資料

痛風病人 8.2 10.7 7.5 14.6 6.3 9.2 11.9 5.6 12.8 4.9

正常人 4.7 6.3 5.2 6.8 5.6 4.2 6.0 7.4

敘述統計量

| | 樣品數 | 平均 | 平方和 | 變方 |
|---|---|---|---|---|
| 痛風病人 | $n_1=10$ | $\overline{X}_1=9.17$ | 95.4010 | 10.6001 |
| 正常人 | $n_2=8$ | $\overline{X}_2=5.775$ | 8.0150 | 1.1450 |

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{10.6001}{1.1450} = 9.2577 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$T' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{9.17 - 5.775}{\sqrt{\frac{10.6001}{10} + \frac{1.1450}{8}}}$$

$$= \frac{3.395}{1.0969} = 3.0952$$

# 加權 t 值

$$t'_{0.025} = \frac{(t_{0.025,9})\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right) + (t_{0.025,7})\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$= \frac{(2.262)\left(\frac{10.6001}{10}\right) + (2.365)\left(\frac{1.1450}{8}\right)}{\frac{10.6001}{10} + \frac{1.1450}{8}}$$

$$= 2.2743$$

$$|T| = 3.0952 > t'_{0.025} = 2.2743 \quad \text{拒絕} H_0$$

痛風病人與正常人血中尿酸量有顯著差異

# 加權自由度

$$df' = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{10.6001}{10} + \frac{1.1450}{8}\right)^2}{\frac{\left(\frac{10.6001}{10}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{1.1450}{8}\right)^2}{7}}$$

$$= 11.33 \cong 11$$

$$|T'| = 3.0952 > t'_{0.025,11} = 2.201 \quad \text{拒絕H}_0$$

# 大樣本 $n_1 \geq 20$ 及 $n_2 \geq 20$

1.雙尾檢定 $\mu_1 = \mu_2$ vs $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

$$|T| = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \right| > Z_{1-\alpha/2} \Rightarrow \text{拒絕} H_0$$

2.單尾檢定 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ vs $H_a: \mu_1 > \mu_2$

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} > Z_{1-\alpha} \Rightarrow \text{拒絕} H_0$$

單尾檢定 $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ vs $H_a: \mu_1 < \mu_2$

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} < -Z_{1-\alpha} \Rightarrow \text{拒絕} H_0$$

# 樣品數決定

大樣品公式

雙尾檢定 $n = \frac{2\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\left[Z_{1-\alpha/2} + Z_{1-\beta}\right]^2$

單尾檢定 $n = \frac{2\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\left[Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}\right]^2$

小樣品公式

雙尾檢定 $n = \frac{2\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\left[t_{\alpha/2,2(n-1)} + t_{\beta,2(n-1)}\right]^2$

單尾檢定 $n = \frac{2\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\left[t_{\alpha,2(n-1)} + t_{\beta,2(n-1)}\right]^2$

例：

設計一個試驗比較 A 、 B 兩藥品服用後血中 濃度曲線下之面積（Area Under Curve AUC, 代表藥物被身體吸收的量）若假定 A 、 B 兩藥品 AUC 平均差異為 7.8 ，共同變方為 170 ， α=0.05 ，檢定力為 0.8 ，則本試驗每組需多少人？

先用大樣品公式取得小樣品公式起始值

$$n=\frac{2\sigma^2}{(\mu_1-\mu_2)^2}\left[Z_{1-\alpha/2}+Z_{1-\beta}\right]^2$$

$$=\frac{2(170)}{(7.8)^2}\left[1.96+0.842\right]^2$$

$$=43.8$$

$$\cong 44$$

再使用小樣品公式

$$n = \frac{2\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\left[t_{0.025,86} + t_{0.\ 2,86}\right]^2$$

$$\cong \frac{2(170)}{(7.8)^2}\left[1.989 + 0.847\right]^2$$

$$= 44.9$$

$$\cong 45$$

以自由度 =88　t 值再代一次

$$n \cong \frac{2(170)}{(7.8)^2}\left[1.986 + 0.846\right]^2$$

$$= 44.8$$

$$\cong 45$$

每組取45位病人

# 兩獨立樣品比例比較之推論

| | 新殺蟲劑 | 現使用殺蟲劑 | 合計 |
|---|---|---|---|
| 死蟲數 | 320 （0.8） | 60 （0.6） | 380 |
| 活蟲數 | 80 （0.2） | 40 （0.4） | 120 |
| 合計 | 400 | 100 | 500 |

兩種殺蟲劑效果是否不同？

$P_1$：使用新殺蟲劑某昆蟲族群之死亡率

$P_2$：使用現有殺蟲劑某昆蟲族群之死亡率

$$H_0 : P_1 = P_2 \quad vs \quad H_a : P_1 \neq P_2$$

資料結構

| | 新殺蟲劑 | 現使用殺蟲劑 | 合計 |
|---|---|---|---|
| 死蟲數 | $X_1 \quad (\hat{p}_1)$ | $X_2 \quad (\hat{p}_2)$ | $X_1+X_2$ |
| 活蟲數 | $n_1-X_1 \quad (1-\hat{p}_1)$ | $n_2-X_2 \quad (1-\hat{p}_2)$ | $n_1+n_2-X_1-X_2$ |
| 合計 | $n_1$ | $n_2$ | $n_1+n_2$ |

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} \qquad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

$$V(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{p_1(1 - p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1 - p_2)}{n_2}$$

若$H_0$成立 $p_1 = p_2 = p$

$$V(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = p(1 - p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

$$\hat{p} = \frac{(X_1 + X_2)}{(n_1 + n_2)}$$

$$\hat{V}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

決策方法

$$|Z| = \left| \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \right| > Z_{1-\alpha/2} \Rightarrow \text{拒絕} H_0$$

$$\hat{p}_1 = \frac{320}{400} = 0.8 \qquad \hat{p}_2 = \frac{60}{100} = 0.6$$

$$\hat{p} = \frac{320+60}{400+100} = 0.76 \;,\; \alpha = 0.05$$

$$|Z| = \left| \frac{0.8-0.6}{\sqrt{(0.76)(0.24)\left(\frac{1}{400}+\frac{1}{100}\right)}} \right| = 4.188 > Z_{0.975} = 1.96 \Rightarrow \text{拒絕} H_0$$

兩種殺蟲劑的效果有顯著差異

## $p_1 - p_2$的$(1-\alpha)$%信賴區間

$$L = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$U = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

例

$$L = (0.8-0.6) - 1.96\sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{400} + \frac{(0.6)(0.4)}{100}}$$
$$= (0.2) - (1.96)(0.05292)$$
$$= 0.0963$$

$$U = (0.8-0.6) + 1.96\sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{400} + \frac{(0.6)(0.4)}{100}}$$
$$= (0.2) + (1.96)(0.05292)$$
$$= 0.3037$$

# 變方推論

例：奶粉每罐重量為 450 公克。產品規格訂定標準偏差 $\sigma_0$ 不能大於 10 公克，現抽取今日生產 5 罐奶粉重量如下：

430、 435、 460、 465、 438

今日生產的奶粉標準偏差是否大於 10 公克？

$$H_0:\sigma \le \sigma_0 \quad vs \quad H_a:\sigma > \sigma_0$$

$$\Rightarrow H_0:\sigma^2 \le \sigma_0^2 \quad vs \quad H_a:\sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$\Rightarrow H_0:\sigma^2 \le 100 \quad vs \quad H_a:\sigma^2 > 100$$

$$\sum x_i = (430 + \cdots + 438) = 2228$$

$$S^2 = \frac{1}{4}\left[430^2 + \cdots + 438^2 - \frac{(2228)^2}{5}\right] = \frac{997.20}{4}$$

$$= 249.3$$

$$S = 15.79$$

$S^2$為$\sigma^2$的估計值

現 $S^2 = 249.3 \quad vs \quad \sigma_0^2 = 100$

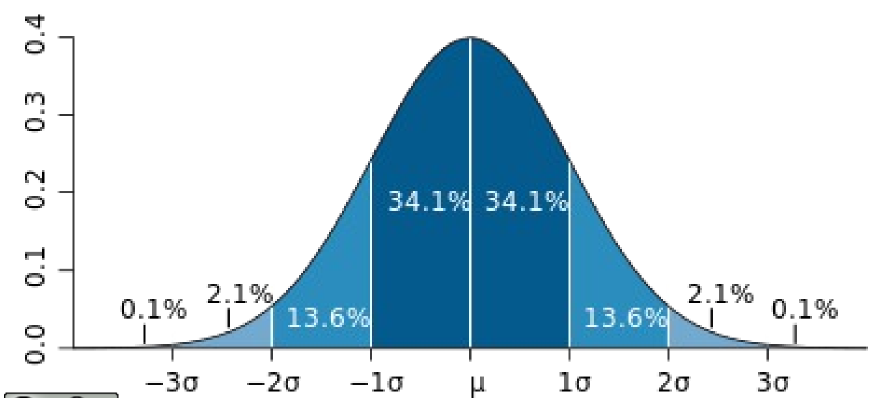
是否$\sigma^2$的確 $> 100$???

必須知道$S^2$之抽樣分佈

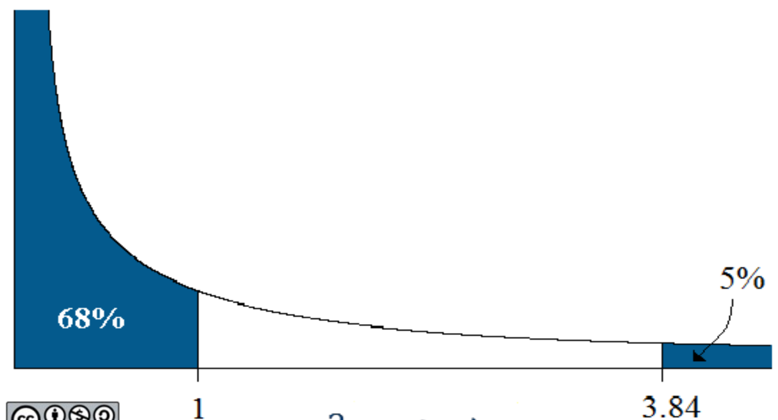
# 卡方分佈（Chi-square Distribution）

- 卡方分佈為常態變數平方和之分佈
- Z 為標準常態變數
- $Z^2$ 為卡方 1 個自由度之分佈

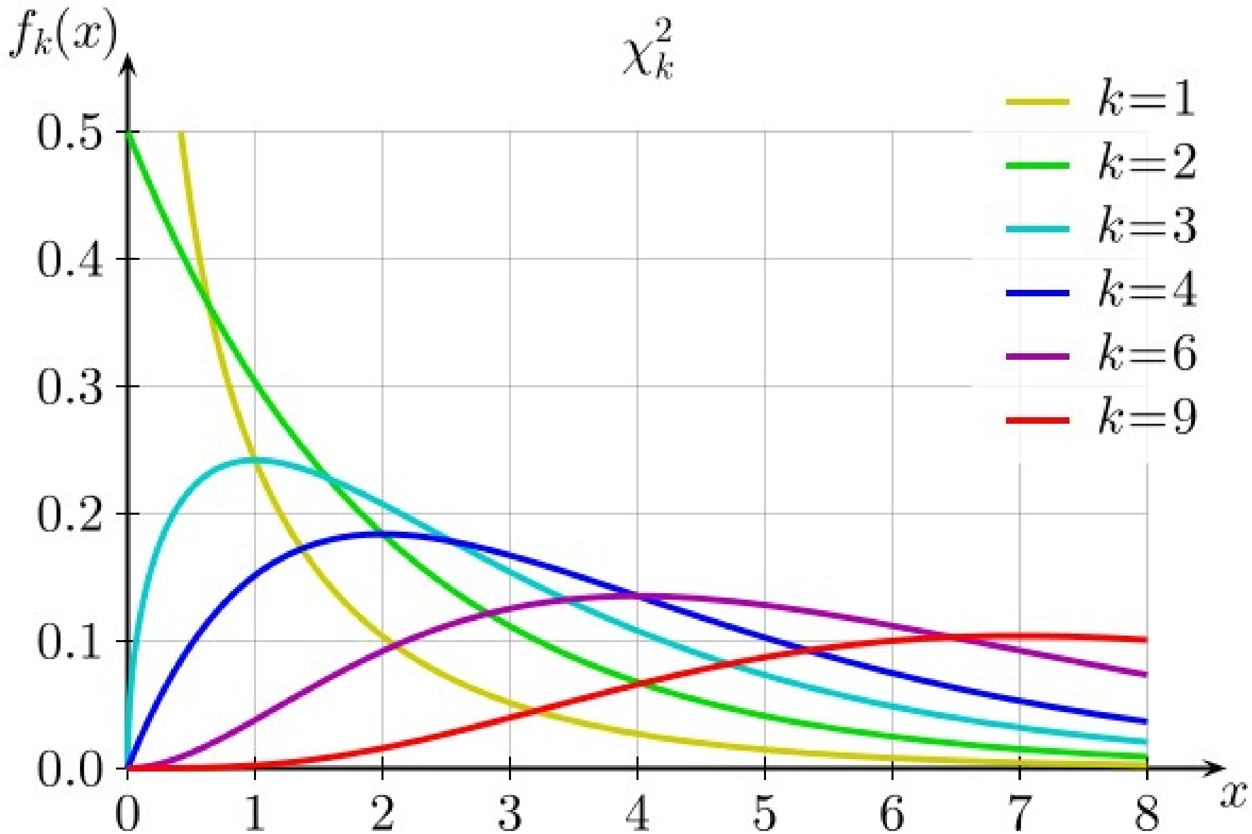
P.487 附表 6




Z 值分布




$\chi^2_{(1)}$ 分布




# 幾種不同自由度之卡方分布圖

若$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$為真時

偏差平方和除以$\sigma_0^2$之分佈為

自由度為$(n-1)$之卡方分佈

步驟： $T=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha,n-1}$ 拒絕$H_0$

# 例：奶粉罐重量 α=0.05

$$T=\frac{(4)(249.3)}{100}=9.972>\chi^2_{0.05,4}=9.4877$$

本日奶粉罐重量的標準偏差大於10

必須立刻改善製程

$\sigma^2$的(1- $\alpha$)%信賴區間

$$L = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}$$

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}}$$

$$L = \frac{(4)(249.3)}{\chi^2_{0.025,4}} = \frac{997.2}{11.1433} = 89.49$$

$$U = \frac{(4)(249.3)}{\chi^2_{0.975,4}} = \frac{997.2}{0.4844} = 2058.4292$$

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 100$ vs. $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Since 95% CI for $\sigma^2$ include 100, fail to reject the null hypothesis at the 5% singificance level.

# 兩族群變方相等性檢定

Hypothesis:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs. $H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ .

$S_1^2$ and $S_2^2$ be the sample variance for two independent samples with sample size $n_1$ and $n_2$. $S_N^2 = \max\{S_1^2, S_2^2\}$ and $S_D^2 = \min\{S_1^2, S_2^2\}$

Test Statistic:

$F = S_N^2 / S_D^2$.

Reject $H_0$ at the $\alpha$ singificance level if

$F > F_{\alpha, n_N-1, n_D-1}$.(p. 488 - p .493)

# 例：痛風病人與正常人血中尿酸量之比較

Example:

$S_1^2 = 10.6001$, $n_1 = 10$

$S_2^2 = 1.1450$, $n_2 = 8$;

$$S_N^2 = \max\{10.6001,\ 1.1450\} = 10.6001;$$

$$S_D^2 = \min\{10.6001,\ 1.1450\} = 1.1450$$

$$F = 10.6001/1.145 = 9.2577$$

$$> F_{0.05,\, 9,\, 7} = 3.6767.$$

Reject the null hypothesis of equal variances at the 0.05 level.

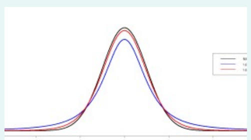
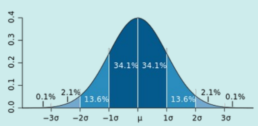
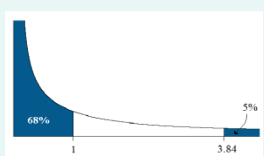
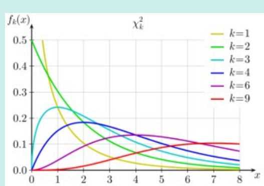
# 總結（Summary）

- 小樣品均值檢定： t- 分佈
- 單樣品比例檢定
- 二個樣品均值比較之推論
  - 相依樣品
  - 獨立樣品
- 樣本數之決定
- 兩獨立樣品比例比較之推論
- 變方推論

# 習題

- P. 208: 2, 3, 6, 8, 11, 13, 14, 15

# 版權聲明

| 頁碼 | 作品 | 授權條件 | 作者 / 來源 |
|---|---|---|---|
| 1-65 |  | | 轉載自 Microsoft Office 2003 多媒體藝廊，依據 Microsoft 服務合約及著作權法第 46、 52、65 條合理使用。 |
| 6 |  | CC BY NC SA | 國立臺灣大學 農藝系 劉仁沛 教授。 |
| 57 |  | CC BY | Wikipedia Normal distribution<br>http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_deviation_diagram.svg<br>2013/11/08 visited |
| 57 |  | CC BY NC SA | 國立臺灣大學 農藝系 劉仁沛 教授。 |
| 58 |  | | Wikipedia Chi-squared distribution<br>http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chi-square_pdf.svg<br>2013/11/08 visited |