第 0 章
函數 (Functions)

目錄

0.1	數、區間、不等式	**1**
0.2	函數	**3**
0.3	函數運算	**4**
0.4	函數圖形	**5**
0.5	多項式函數	**7**
0.6	函數特性	**7**
0.7	三角函數	**8**

(i) 介紹有關函數的一些基本概念

(ii) 介紹一些基本函數

(iii) 介紹一些基本函數的圖形

0.1 數 (Numbers)、區間 (Intervals)、不等式 (Inequalities)

數

符號 0.1.1.

(1) 我們以下列符號來表示各數系:
  $\mathbb{N}$ 自然數系 (正整數, natural numbers),
  $\mathbb{Z}$ 整數系 (integers),
  $\mathbb{Q}$ 有理數系 (rational numbers),
  $\mathbb{R}$ 實數系 (real numbers),
  $\mathbb{C}$ 複數系 (complex numbers)。

(2) $\forall$ 表示 “對所有”(for all),
  $\exists$ 表示 “存在”(there exists),
  $\exists!$ 表示 “存在唯一”(there is a unique)。

區間

定義 0.1.2.

(1) 有限區間:

(i) 開區間 (open interval), $(a,b)=\{x|\, a<x<b\}$ 。

(ii) 閉區間 (closed interval), $[a,b]=\{x|\, a\le x\le b\}$ 。

(iii) 半開區間, $[a,b)=\{x|\, a\le x<b\}$,
$(a,b]=\{x|\, a<x\le b\}$ 。

(2) 無限區間:
$$\begin{aligned}(a,\infty)&=\{x|\, x>a\},\\ [a,\infty)&=\{x|\, x\ge a\},\\ (-\infty,b)&=\{x|\, x<b\},\\ (-\infty,b]&=\{x|\, x\le b\},\\ (-\infty,\infty)&=\mathbb{R}\ 。\end{aligned}$$

(3) 在以上各區間中,a、b 稱爲邊界點 (boundary point)。在各有限區間中 (a,b) 上的點, 或無限區間中 (a,∞) 及 $(-\infty,b)$ 之點, 稱爲內點 (interior point)。

[註] 無限區間 (a,∞) 不可記爲 $(a,\infty]$ 。∞ 不是 (a,∞) 的邊界點。

符號 0.1.3. 令 $I_1,I_2,I_3,\cdots$ 爲一序列的區間, 則
$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad 表示 \quad I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n\ ,$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad 表示 \quad I_1\cup I_2\cup I_3\cup\cdots \quad 。$$

對於交集運算也有同樣表法。

例 0.1.4. 求:

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]$,

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)$,

(3) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right]$,

(4) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right)$,

(5) $\bigcup_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ 。

不等式

性質 0.1.5. 令 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 則

(1) 若 $a<b$, 則 $a\pm c<b\pm c$,

(2) 若 $a<b, c<d$, 則 $a+c<b+d$,

(3) 若 $a<b, c>0$, 則 $ac<bc$,

(4) 若 $a<b, c<0$, 則 $ac>bc$,

(5) 若 $0<a<b$, 則 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 。

例 0.1.6. 解以下各不等式:

(1) $2x-3<x+4\leq 3x-2$,

(2) $x^3>x$,

(3) $(2-x)(1+x)^2x^3\geq 0$,

(4) $-2<\dfrac{2x-3}{x+1}\leq 1$,

(5) $2x^2+1>4x$ 。

絕對值

性質 0.1.7. $a,b\in\mathbb{R}$, 則

(1) $|ab|=|a||b|$,

(2) $|a+b|\leq|a|+|b|$(三角不等式),

(3) $|a|-|b|\leq|a-b|$ 。

例 0.1.8. 解以下各絕對值方程式:

(1) $|3x-2|\leq 1$,

(2) $|x+1|=|x-3|$,

(3) $|x-1|-|x-10|\geq 5$,

(4) $|5-\frac{2}{x}|<3$ 。

0.2 函數(Functions)

函數的呈現方式

註 0.2.1. 函數可能以下列方式呈現:

(1) 以文字方式描述。例:

 (i) 圓面積與半徑的平方成正比;

 (ii) $\pi(x)$ 是小於或等於 x 的質數個數。

(2) 以數値方式描述, 通常列表顯示。例如：人口數。

(3) 以圖形方式描述。例如: 地震圖。

(4) 以數學式描述。

例 0.2.2. 對一個面積爲25的直角三角形, 將斜邊長 h 以周長 p 表出。

函數定義

定義 0.2.3.

(1) 函數 (function) $f: A \to B$ 是一個對應, 滿足: 對所有 $a \in A$, 存在惟一 $b \in B$, 使得 f 將 a 對應到 b。即 $\forall a \in A$, $\exists!\, b \in B \ni f(a) = b$。

(2) A 稱爲 f 的定義域 (domain), 記爲 Dom f; B 稱爲 f 的對應域 (codomain); $f(A) = \{f(a) | a \in A\} \subset B$ 稱爲 f 的值域 (range), 記爲 Range f。

[註] f 可視爲從 A 到 $f(A)$ 的函數。

定義域與值域

註 0.2.4. 若 $f(x)$ 是個以數學式定義的實值函數, 但未指明其定義域, 則其定義域即約定爲使該數學式有意義之所有 x 值。

例 0.2.5. 令 $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$, 求其定義域與值域。

例 0.2.6. 求函數 $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ 的定義域與值域。

例 0.2.7. 求函數 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ 的定義域與值域。

一對一與映成

定義 0.2.8.

(1) 一個函數 f 若滿足 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, 則 f 稱爲一對一 (one-to-one) 函數。

(2) 若 f 之值域等於對應域,f 稱爲映成 (onto) 函數。

[註] 一對一的條件等價於 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$。

例 0.2.9. 證明 $y = x^3$ 爲一對一函數。

例 0.2.10. 令 $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, f 爲從 $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ 對應到 $\mathbb{Z}_+$ 的函數,

$$f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m,$$

試證 f 是一對一且映成的函數。

0.3 函數運算

定義 0.3.1.

(1) 四則運算:

$$\begin{array}{rll}
\text{(i)} & (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), & \operatorname{Dom}(f \pm g) = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g\text{。} \\
\text{(ii)} & (f \cdot g)(x) = f(x)g(x), & \operatorname{Dom}(f \cdot g) = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g\text{。} \\
\text{(iii)} & (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, & \operatorname{Dom} \frac{f}{g} = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \{x | g(x) \neq 0\}\text{。}
\end{array}$$

(2) 合成運算(composite functions):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \operatorname{Dom}(f \circ g)(x) = \{x \in \operatorname{Dom}(g) | g(x) \in \operatorname{Dom} f\}\text{。}$$

例 0.3.2. 設 $f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x}$, 且 $h(x) = (f \cdot g)(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$, 則函數 h 的定義域 $\operatorname{Dom} h$ 應爲 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, 而非 $\mathbb{R}$。

例 0.3.3. 令 $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{2 - x}$, 求 $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ 及它們的定義域。

例 0.3.4. 若 $f_0(x) = \frac{x}{x+1}$ 且 $f_{n+1} = f_0 \circ f_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, 求 $f_n(x)$ 的公式。

0.4 函數圖形

<u>函數圖形</u>

定義 0.4.1. 若 $A, B \subset \mathbb{R}$, 則 f 稱爲實數值函數 (real valued function), 集合 $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ 稱爲 f 的圖形 (graph)。

註 0.4.2. (1) 垂直線判別法: 一個圖形是函數圖形的充要條件是任一垂直線與其至多交於一點。

(2) 水平線判別法: 一個函數是一對一的充要條件爲其圖形與每一水平線至多交於一點。

<u>函數圖形的變動</u>

註 0.4.3.

(1) 鉛直方向平移: $y = f(x) + c$ 。

(2) 水平方向平移: $y = f(x + c)$ 。

(3) 鉛直方向伸縮: $y = cf(x)$ 。

(4) 水平方向伸縮: $y = f(cx)$ 。

例 0.4.4. 作圖 $f(x) = x^2 + 3$ 。

例 0.4.5. 作圖 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 。

例 0.4.6. 對不同的 c 作圖: $f(x) = x^3 + cx$ 。

<u>一些例子</u>

例 0.4.7. 分段定義的函數:

(1) 絕對值函數 $|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$ 。

(2) 最大整數函數, 高斯函數, 地板函數 (greatest integer function, Gauss function, floor function)
$\lfloor x \rfloor = n$, 若 $n \leq x < n + 1, n \in \mathbb{Z}$ 。$\lfloor x \rfloor$ 即小於或等於 x 的最大整數。

(3) 天花板函數 (ceiling function)
$\lceil x \rceil = n + 1$, 若 $n < x \leq n + 1, n \in \mathbb{Z}$ 。$\lceil x \rceil$ 即大於或等於 x 的最小整數。

(4) Heaviside 函數

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases} 。$$

(5) 符號函數 (The signum function)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} 。$$

(6) $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & \text{if } x<-1\\ -x & \text{if } -1\le x<1\\ \sqrt{x-1} & \text{if } x\ge 1\end{cases}$ 。

[註] 地板函數、天花板函數都是階梯函數 (step function) 之例。

例 0.4.8. 一個數列 $\{a_n\}$ 可視爲定義在 $\mathbb{N}$ 上的函數, 即 $f(n)=a_n$ 。

例 0.4.9. 將圖中的函數以式子寫出。

例 0.4.10. 作圖 $f(x)=|x^2-1|$ 。

例 0.4.11. 作圖 $|x-y|+|x|-|y|\le 2$ 。

例 0.4.12. $x^4-4x^2-x^2y^2+4y^2=0$ 。

例 0.4.13. 如何以 $\lfloor x\rfloor$ 表出 $\lceil x\rceil$?

0.4.14. 一些主要的函數類型:

(1) 線性函數 (linear function): $f(x)=mx+b$ 。

(2) 冪次函數 (power function): $f(x)=x^n$ 。

- (i) $n\in\mathbb{N}$ 。
- (ii) $-n\in\mathbb{N}$ 。
- (iii) $n=\frac{1}{m}\in\mathbb{Q}$ 。
- (iv) $n\in\mathbb{R}$ 。

(3) 多項式函數 (polynomial function): $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 。

(4) 有理函數 (rational function): $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ 。

(5) 代數函數 (algebraic function): 將多項式函數反覆作四則及開方運算而得。

(6) 三角函數 (trigonometric function)。

(7) 指數函數 (exponential function): $f(x)=a^x, a>0, a\neq 1$ 。

(8) 對數函數 (logarithmic function): $f(x)=\log_a x, a>0, a\neq 1$ 。

(9) 超越函數 (transcendental function), 非代數函數。

(10) 基本函數 (elementary function): 將有理函數, 冪次函數, 三角函數, 反三角函數, 指數函數, 對數函數 反覆作有限次四則, 合成及開方運算而得。

0.5 多項式函數

定義 0.5.1.

(1) 形如 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的函數稱爲多項式函數。

(2) 式中的 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$, 稱爲係數; n 稱爲次數。

定理 0.5.2.

(1) 多項式 $p(x)$ 除以 $x-r$ 的餘式是 $p(r)$ 。

(2) 實數 r 是多項式 $p(x)$ 之根的充要條件是 $x-r$ 爲 $p(x)$ 的因式 。

註 0.5.3.

(1) 多項式方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 。

(2) $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$ 。

(3) 若 n 爲奇數, 則 $x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1})$ 。

0.6 函數特性

奇偶性

定義 0.6.1.

(1) 若 $\forall x\in \operatorname{Dom} f$, $f(-x)=f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲偶函數 (even function)。

(2) 若 $\forall x\in \operatorname{Dom} f$, $f(-x)=-f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲奇函數 (odd function)。

註 0.6.2. (1) 奇函數之圖形對原點對稱; 偶函數之圖形對 $y-$ 軸對稱。

(2) 任一函數必可寫成一個奇函數和一個偶函數的和, 且其表法是惟一的。

例 0.6.3.

(1) 若 $g(x)$ 爲奇函數, 則對 $g(0)$ 可下什麼結論?

(2) 若 $g(x)$ 爲偶函數, 則對 $g(0)$ 可下什麼結論?

例 0.6.4. 判斷 $\lfloor x\rfloor$ 的奇偶性。

例 0.6.5. 作圖 $y=|x^2-4|x|+3|$ 。

昇降性

定義 0.6.6.

(1) 若 $\forall x,y\in I, x<y$, 則 $f(x)<f(y)$, 則稱 $f(x)$ 在上 I 爲遞增 (或上昇, increasing)。

(2) 若 $\forall x,y\in I, x<y$, 則 $f(x)>f(y)$, 則稱 $f(x)$ 在上 I 爲遞減 (或下降, decreasing)。

0.7 三角函數(Trigonometric Functions)

本節僅簡要的條列有關三角函數的主要性質, 供同學查看之用。

定義 0.7.1. (三角函數 trigonometric functions)

(1) 銳角 (acute angles):

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}, \qquad \tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}},\\
\cot\theta &= \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}, \qquad \sec\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}, \qquad \csc\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} \text{。}
\end{aligned}$$

(2) 一般角 (general angles):

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= y, \qquad \cos\theta = x, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},\\
\cot\theta &= \frac{x}{y}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{x}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{y} \text{。}
\end{aligned}$$

性質 0.7.2. (1) 特別角函數值:

	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	x	1	x
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	x	0	x	1

(2) 函數正負:

(3) 定義域與值域:

$$\begin{array}{lll}
\sin : \mathbb{R} \to [-1,1], & & \cos : \mathbb{R} \to [-1,1],\\
\tan : \mathbb{R} - \left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \to \mathbb{R}, & & \cot : \mathbb{R} - \{n\pi\} \to \mathbb{R},\\
\sec : \mathbb{R} - \left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \to \mathbb{R} - (-1,1), & & \csc : \mathbb{R} - \{n\pi\} \to \mathbb{R} - (-1,1) \text{。}
\end{array}$$

(4) 圖形:

(5) 週期:

$$\sin,\cos,\sec,\csc : \text{最小週期 } 2\pi; \quad \tan,\cot : \text{最小週期 } \pi \text{ 。}$$

(6) 奇偶性:

$$\sin,\tan,\cot,\csc : \text{奇函數}; \quad \cos,\sec : \text{偶函數} \text{ 。}$$

(7) 換角公式:

$$\begin{aligned}
f(n\pi+\theta) &= \pm f(\theta),\\
f\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi+\theta\right) &= \pm cof(\theta)\text{。}
\end{aligned}$$

($\pm$ 之決定: 假設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 視 f 在 $n\pi+\theta$ 處之正負值而定。)

(8) 倒數公式:

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \text{ 。}$$

(9) 平方公式:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta, \qquad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta \text{ 。}$$

(10) 複角公式 (addition and subtraction formula):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \text{ 。} \end{aligned}$$

(11) 倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \text{。}$$

(12) 半角公式:

$$\begin{aligned} &\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \\ &\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \text{。} \end{aligned}$$

(正負號視左式的正負值而定。)

(13) 三倍角公式:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \text{。}$$

(14) 和差化積:

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ 。} \end{aligned}$$

(15) 積化和差:

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right], \\ \cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right], \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right], \\ \sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right] \text{ 。} \end{aligned}$$

定理 0.7.3. (1) 半徑爲 r 之圓中, 圓心角爲 θ 之弧的弧長爲 $r\theta$ 。

(2) 半徑爲 r 之圓中, 圓心角爲 θ 之上扇形的面積爲 $\frac{1}{2}r^2\theta$ 。

定理 0.7.4. 令 $\angle A, \angle B, \angle C$ 爲一三角形的三個角, a, b, c 分別爲其對應邊之長, 則

(1) 正弦定律 (law of sines):

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ 。}$$

(2) 餘弦定律 (law of cosines):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \text{ 。}$$

(3) 面積公式:

$$\text{三角形面積} = \frac{1}{2}ab\sin C \text{ 。}$$

定理 0.7.5. (n 倍角公式)

(1) $$\sin n\alpha = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}\alpha \sin^{2k+1}\alpha$$

$$= \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha & ,n \text{ 爲偶數} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\alpha & ,n \text{ 爲奇數。} \end{cases}$$

(2) $$\cos n\alpha = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\alpha \sin^{2k}\alpha$$

$$= \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\alpha & ,n \text{ 爲偶數} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha & ,n \text{ 爲奇數,} \end{cases}$$

其中 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 爲二項係數 。