

Unit 12 自然演繹法

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用 CC 「姓名標示－非商業性－相同方式分享」台灣 3.0 版授權釋出】

Unit 12 自然演繹法

- 除了命題邏輯的推論規則之外，還需要處理量詞的規則。
- 量詞規則的分類：個例規則、通稱規則、否定規則。

Unit 12 自然演繹法

- (1) 全稱個例規則：(UI, universal instantiation)

$$\frac{(\forall x)\varphi(x)}{\varphi(n/x)}$$

- 此處出現的 n 代表所有出現過的名稱，也可以說沒有限制。

Unit 12 自然演繹法

- (2) 全稱通稱規則：(UG, universal generalization)

$$\frac{\varphi(n)}{(\forall x)\varphi(x/n)}$$

- 此處出現的 n 不能是已有特定指涉的名稱符號，也不能是由 EI 規則得到的語句中的名稱符號。

Unit 12 自然演繹法

- (3) 存在通稱規則：(EG, existential generalization)

$$\frac{\varphi(n)}{(\exists x)\varphi(x/n)}$$

- 此處出現的 n 沒有限制。

Unit 12 自然演繹法

- (4) 存在個例規則：(EI, existential instantiation)

$$\frac{(\exists x)\varphi(x)}{\varphi(n/x)}$$

- 此處出現的 n 必須是未出現過名稱符號，也就是必須確定是第一次出現。

Unit 12 自然演繹法

- 否定規則：(QN)
- 定義： $(\exists x)\varphi(x) =_{df.} \neg(\forall x)\neg\varphi(x)$
- $\Box(\exists x)\varphi(x) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\varphi(x)$
- $\Box\neg(\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$
- $\Box(\forall x)\neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$
- $\Box\neg(\exists x)\neg\varphi(x) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x)$

Unit 12 自然演繹法

● 實例說明：

- (a) $(\forall x)P_x, (\exists y)P_y \rightarrow (\forall x)Q_x, (\forall x)(Q_x \rightarrow R_x) \quad \boxtimes (\exists x)(Q_x \wedge R_x)$
- (b) $(\forall x)(K_x \rightarrow \neg M_x), (\forall x)(K_x \vee N_x), (\forall x)(\neg K_x \vee M_x) \quad \boxtimes (\exists x)(\neg K_x \wedge N_x)$
- (c) $\neg(\exists x)(\neg C_x \wedge D_x), (\exists x)D_x \quad \boxtimes (\exists x)C_x$
- (d) $(\forall x)(B_x \rightarrow C_x), (\forall x)(A_x \leftrightarrow \neg B_x) \quad \boxtimes (\exists x)(A_x \vee C_x)$
- (e) $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \quad \boxtimes (\forall y)(\forall x)F_{xy}$
- (f) $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \quad \boxtimes (\forall x)(\forall y)F_{yx}$

Unit 12 自然演繹法

- (a)
- 1. $(\forall x)P_x$
- 2. $(\exists y)P_y \rightarrow (\forall x)Q_x$
- 3. $(\forall x)(Q_x \rightarrow R_x)$

目標



- $(\exists x)(Q_x \wedge R_x)$

Unit 12 自然演繹法

- (a)
- 1. $(\forall x)P_x$ Pr
- 2. $(\exists y)P_y \rightarrow (\forall x)Q_x$ Pr
- 3. $(\forall x)(Q_x \rightarrow R_x)$ Pr
- 4. P_a
- 5. $(\exists y)P_y$
- 6. $(\forall x)Q_x$
- 7. Q_a
- 8. $Q_a \rightarrow R_a$
- 9. R_a
- 10. $Q_a \wedge R_a$
- 11. $(\exists x)(Q_x \wedge R_x)$

Unit 12 自然演繹法

- (a)
- 1. $(\forall x)P_x$ Pr
- 2. $(\exists y)P_y \rightarrow (\forall x)Q_x$ Pr
- 3. $(\forall x)(Q_x \rightarrow R_x)$ Pr
- 4. P_a 1, UI
- 5. $(\exists y)P_y$ 4, EG
- 6. $(\forall x)Q_x$ 2,5 MP
- 7. Q_a 6, UI
- 8. $Q_a \rightarrow R_a$ 3, UI
- 9. R_a 7,8 MP
- 10. $Q_a \wedge R_a$ 7,9 Conj
- 11. $(\exists x)(Q_x \wedge R_x)$ 10, EG

Unit 12 自然演繹法

- (b)
- 1. $(\forall x)(K_x \rightarrow \neg M_x)$
- 2. $(\forall x)(K_x \vee N_x)$
- 3. $(\forall x)(\neg K_x \vee M_x)$

目
標



- $(\exists x)(\neg K_x \wedge N_x)$

Unit 12 自然演繹法

- | | |
|--|-------------------|
| • (b) 1. $(\forall x)(Kx \rightarrow \neg Mx)$ | <u>Pr</u> |
| • 2. $(\forall x)(Kx \vee Nx)$ | <u>Pr</u> |
| • 3. $(\forall x)(\neg Kx \vee Mx)$ | <u>Pr</u> |
| • 4. $\neg Ka \vee Ma$ | <u> </u> |
| • 5. $Ma \vee \neg Ka$ | <u> </u> |
| • 6. $\neg \neg Ma \vee \neg Ka$ | <u> </u> |
| • 7. $\neg Ma \rightarrow \neg Ka$ | <u> </u> |
| • 8. $Ka \rightarrow \neg Ma$ | <u> </u> |
| • 9. $Ka \rightarrow \neg Ka$ | <u> </u> |
| • 10. $\neg Ka \vee \neg Ka$ | <u> </u> |
| • 11. $\neg Ka$ | <u> </u> |
| • 12. $Ka \vee Na$ | <u> </u> |
| • 13. Na | <u> </u> |
| • 14. $\neg Ka \wedge Na$ | <u> </u> |
| • 15. $(\exists x)(\neg Kx \wedge Nx)$ | <u> </u> |

Unit 12 自然演繹法

• (b) 1. $(\forall x)(Kx \rightarrow \neg Mx)$	<u>Pr</u>
• 2. $(\forall x)(Kx \vee Nx)$	<u>Pr</u>
• 3. $(\forall x)(\neg Kx \vee Mx)$	<u>Pr</u>
• 4. $\neg Ka \vee Ma$	<u>3, UI</u>
• 5. $Ma \vee \neg Ka$	<u>4, Comm</u>
• 6. $\neg \neg Ma \vee \neg Ka$	<u>5, DN</u>
• 7. $\neg Ma \rightarrow \neg Ka$	<u>6, Impl</u>
• 8. $Ka \rightarrow \neg Ma$	<u>1, UI</u>
• 9. $Ka \rightarrow \neg Ka$	<u>7, 8, HS</u>
• 10. $\neg Ka \vee \neg Ka$	<u>9, Impl</u>
• 11. $\neg Ka$	<u>10, Taut</u>
• 12. $Ka \vee Na$	<u>2, UI</u>
• 13. Na	<u>11, 12, DS</u>
• 14. $\neg Ka \wedge Na$	<u>11, 13, Conj</u>
• 15. $(\exists x)(\neg Kx \wedge Nx)$	<u>14, EG</u>

Unit 12 自然演繹法

- (c)
- 1. $\neg(\exists x)(\neg Cx \wedge Dx)$
- 2. $(\exists x)Dx$

目
標



- $(\exists x)Cx$

Unit 12 自然演繹法

• (c)

• 1. $\neg(\exists x)(\neg Cx \wedge Dx)$

Pr

• 2. $(\exists x)Dx$

Pr

• 3. $(\forall x)\neg(\neg Cx \wedge Dx)$

• 4. $(\forall x)(\neg\neg Cx \vee \neg Dx)$

• 5. Da

• 6. $\neg\neg Ca \vee \neg Da$

• 7. $Ca \vee \neg Da$

• 8. $\neg\neg Da$

• 9. Ca

• 10. $(\exists x)Cx$

Unit 12 自然演繹法

• (c)

• 1. $\neg(\exists x)(\neg Cx \wedge Dx)$	Pr
• 2. $(\exists x)Dx$	Pr
• 3. $(\forall x)\neg(\neg Cx \wedge Dx)$	1, QN
• 4. $(\forall x)(\neg\neg Cx \vee \neg Dx)$	3, DeM
• 5. Da	2, EI
• 6. $\neg\neg Ca \vee \neg Da$	4, UI
• 7. $Ca \vee \neg Da$	6, DN
• 8. $\neg\neg Da$	5, DN
• 9. Ca	7,8, DS
• 10. $(\exists x)Cx$	9, EG

Unit 12 自然演繹法

- (d)
- 1. $(\forall x)(B_x \rightarrow C_x)$
- 2. $(\forall x)(A_x \leftrightarrow \neg B_x)$

目
標



- $(\exists x)(A_x \vee C_x)$

Unit 12 自然演繹法

• (d) 1. $(\forall x)(Bx \rightarrow Cx)$

• 2. $(\forall x)(Ax \leftrightarrow \neg Bx)$

• 3. $Aa \leftrightarrow \neg Ba$

• 4. $(Aa \rightarrow \neg Ba) \wedge (\neg Ba \rightarrow Aa)$

• 5. $\neg Ba \rightarrow Aa$

• 6. $\neg Aa \rightarrow \neg \neg Ba$

• 7. $\neg Aa \rightarrow Ba$

• 8. $Ba \rightarrow Ca$

• 9. $\neg Aa \rightarrow Ca$

• 10. $\neg \neg Aa \vee Ca$

• 11. $Aa \vee Ca$

• 12. $(\exists x)(Ax \vee Cx)$

Unit 12 自然演繹法

• (d) 1. $(\forall x)(B_x \rightarrow C_x)$	Pr
• 2. $(\forall x)(A_x \leftrightarrow \neg B_x)$	Pr
• 3. $A_a \leftrightarrow \neg B_a$	2, UI
• 4. $(A_a \rightarrow \neg B_a) \wedge (\neg B_a \rightarrow A_a)$	3, Equiv
• 5. $\neg B_a \rightarrow A_a$	4, Simp
• 6. $\neg A_a \rightarrow \neg \neg B_a$	5, Contra
• 7. $\neg A_a \rightarrow B_a$	6, DN
• 8. $B_a \rightarrow C_a$	1, UI
• 9. $\neg A_a \rightarrow C_a$	7, 8, HS
• 10. $\neg \neg A_a \vee C_a$	9, Impl
• 11. $A_a \vee C_a$	10, DN
• 12. $(\exists x)(A_x \vee C_x)$	11, EG

Unit 12 自然演繹法

- (e)

-

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

目
標



- $(\forall y)(\forall x)F_{xy}$

Unit 12 自然演繹法

- (e)

-

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

- 2. $(\forall y)F_{ay}$

- 3. F_{ab}

- 4. $(\forall x)F_{xb}$

- 5. $(\forall y)(\forall x)F_{xy}$

Pr

Unit 12 自然演繹法

• (e)

•

• 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

• 2. $(\forall y)F_{ay}$

• 3. F_{ab}

• 4. $(\forall x)F_{xb}$

—
• 5. $(\forall y)(\forall x)F_{xy}$

Pr

1, UI

2, UI

3, UG

4, UG

Unit 12 自然演繹法

- (f)

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

目
標



- $(\forall x)(\forall y)F_{yx}$

Unit 12 自然演繹法

- (f)

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

Pr

- 2. $(\forall y)F_{ay}$

- 3. F_{ab}

- 4. $(\forall y)F_{yb}$

- 5. $(\forall x)(\forall y)F_{yx}$

Unit 12 自然演繹法

- (f)

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

Pr

- 2. $(\forall y)F_{ay}$

1, UI

- 3. F_{ab}

2, UI

- 4. $(\forall y)F_{yb}$

3, UG

- 5. $(\forall x)(\forall y)F_{yx}$

4, UG
