

# Unit 9 初階邏輯語言

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用 CC 「姓名標示－非商業性－相同方式分享」台灣 3.0 版授權釋出】

## Unit 9 初階邏輯語言

- 傳統邏輯不足之處：只能處理一元述詞的語句，不能處理關係 (relation) 述詞的語句。
- 以 “ $a > b$ ” 為例說明：
- (1) 傳統邏輯讀法：“ $a$ ” 具有 “ $> b$ ” 這個性質。
- (2) 關係述詞讀法：“ $a$ ” 和 “ $b$ ” 兩個東西滿足 “ $>$ ” 這個關係。

# Unit 9 初階邏輯語言

- 單稱語詞 (singular terms)：用來表達個別東西 (individual things) 的語詞，以小寫字母  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ..... 表示。
- 變量 (variables)：用來表達非特定對象的語詞，以小寫字母  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ..... 表示。

# Unit 9 初階邏輯語言

- 述詞符號：用來表達  $n$  個對象之間的關係， $n \geq 1$ 。
- 一元述詞：  $P_a, Q_b, R_x, T_y, \dots$
- 二元述詞：  $P_{ab}, Q_{bc}, R_{xy}, T_{yz}, \dots$
- $n$  元述詞：  $P_{a_1, a_2, \dots, a_n}$
- 注意：  $P_{ab} \neq P_{ba}$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 量詞：用來表達量的多寡的語詞。
- 全稱量詞： $(\forall x)$ 、 $(\forall y)$ 、 $(\forall z)$
- 存在量詞： $(\exists x)$ 、 $(\exists y)$ 、 $(\exists z)$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 初階邏輯語言
- (1) 符號：
  - (i) 名稱符號： $a$ 、 $b$ 、 $c$ .....
  - (ii) 變量： $x$ 、 $y$ 、 $z$ .....
  - (iii)  $n$ 元述詞符號： $P$ 、 $Q$ 、 $R$ .....
  - (iv) 量詞： $\forall$ 、 $\exists$
  - (v) 連接詞： $\neg$ 、 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$
  - (vi) 等同符號： $=$
  - (vii) 輔助符號： $($ 、 $)$

## Unit 9 初階邏輯語言

- (2) 形構規則：分成 (a) 原子句式 (atomic formulae) 以及 (b) 複合句式 (compound formulae)
- (a) 原子句式
  - (i) 以等同符號連接兩個名稱符號的句式，例如  $a = b$ 。
  - (ii) 如果  $P$  是  $n$  元述詞，則  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  為原子句式。

# Unit 9 初階邏輯語言

- (b) 複合語句：
  - (i) 如果  $\phi$  是一個句式，那麼  $\neg \phi$  也是句式。
  - (ii) 如果  $\phi$  和  $\psi$  都是句式，那麼  $\phi \wedge \psi$ ,  $\phi \vee \psi$ ,  $\phi \rightarrow \psi$ ,  $\phi \leftrightarrow \psi$  也都是句式。
  - (iii) 如果  $\phi$  是一個句式，那麼  $(\forall x)\phi(x)$  和  $(\exists x)\phi(x)$  也是句式。
  - (iv) 除了經由規則 (a) 和規則 (b) 建構的句式之外，沒有其他句式。

# Unit 9 初階邏輯語言

- 句式實例說明：
- 以  $a$  代表蘇格拉底， $P_x$  代表  $x$  是哲學家，則  $P_a$  代表蘇格拉底是哲學家。
- 以  $P_x$  代表  $x$  是哲學家，則  $(\forall x)P_x$  是指所有的  $x$  都是哲學家。
- 以  $P_x$  代表  $x$  是哲學家，則  $(\exists x)P_x$  是指有些  $x$  是哲學家。

## Unit 9 初階邏輯語言

- 如果以  $a$  代表蘇格拉底， $b$  代表柏拉圖， $P_{xy}$  代表  $x$  是  $y$  的老師。那麼， $P_{ab}$  代表  $a$  是  $b$  的老師。
- 如果以  $P_{xy}$  代表  $x$  是  $y$  的老師，則  $(\forall x)(\forall y)P_{xy}$  代表所有的  $x$  都是任意  $y$  的老師。 $(\exists x)(\exists y)P_{xy}$  代表有些  $x$  是有些  $y$  的老師。

## Unit 9 初階邏輯語言

- $(\forall x)(\exists y)P_{xy}$  代表任何  $x$  都是一些  $y$  的老師。  $(\exists y)(\forall x)P_{xy}$  代表對某些  $y$  而言，所有的  $x$  都是  $y$  的老師。
- $(\exists x)(\forall y)P_{xy}$  代表有些  $x$  是所有  $y$  的老師。  $(\forall y)(\exists x)P_{xy}$  代表對所有的  $y$  而言，都有一些  $x$  是  $y$  的老師。

# Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- $A$  句型：所有的人都是理性的。
- $M_x$ ： $x$  是人。
- $R_x$ ： $x$  是理性的。

$$(\forall x)(M_x \rightarrow R_x)$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- $E$  句型：所有的人都不是理性的。
- $M_x$ ： $x$  是人。
- $R_x$ ： $x$  是理性的。

$$(\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x)$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- /句型：有些人是理性的。
- $M_x$ ： $x$  是人。
- $R_x$ ： $x$  是理性的。

$$(\exists x)(M_x \wedge R_x)$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- $O$  句型：有些人是不理性的。
- $M_x$ ： $x$  是人。
- $R_x$ ： $x$  是理性的。

$$(\exists x)(M_x \wedge \neg R_x)$$

## Unit 9 初階邏輯語言

- 由於  $A$  句型與  $O$  句型是矛盾的，因此  $A$  句型的否定和  $O$  句型是等值的。

$$(QN) \quad \boxed{\times} \neg(\forall x)\phi(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\phi(x)$$

$$\neg(\forall x)(M_x \rightarrow R_x)$$

$$\leftrightarrow (\exists x)\neg(M_x \rightarrow R_x) \quad (\text{by QN})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg M_x \vee R_x) \quad (\text{Impl})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(\neg\neg M_x \wedge \neg R_x) \quad (\text{DeM})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(M_x \wedge \neg R_x) \quad (\text{DN})$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 反之， $O$  句型的否定和  $A$  句型也是等值的。

$$(QN) \quad \neg(\exists x)\phi(x) \leftrightarrow (\forall x)\neg\phi(x)$$

$$\neg(\exists x)(M_x \wedge \neg R_x)$$

$$\leftrightarrow (\forall x)\neg(M_x \wedge \neg R_x) \quad (\text{by QN})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(\neg M_x \vee \neg\neg R_x) \quad (\text{DeM})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(\neg M_x \vee R_x) \quad (\text{DN})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(M_x \rightarrow R_x) \quad (\text{Impl})$$

## Unit 9 初階邏輯語言

- 由於  $E$  句型與  $I$  句型是矛盾的，因此  $E$  句型的否定和  $I$  句型是等值的。

$$(QN) \quad \neg(\forall x)\phi(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\phi(x)$$

$$\neg(\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x)$$

$$\leftrightarrow (\exists x)\neg(M_x \rightarrow \neg R_x) \quad (\text{by QN})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg M_x \vee \neg R_x) \quad (\text{Impl})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(\neg\neg M_x \wedge \neg\neg R_x) \quad (\text{DeM})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(M_x \wedge R_x) \quad (\text{DN})$$

## Unit 9 初階邏輯語言

- 反之， $\forall$  句型的否定和  $\exists$  句型也是等值的。

$$(QN) \quad \neg(\exists x)\neg\phi(x) \leftrightarrow (\forall x)\phi(x)$$

$$\neg(\exists x)(M_x \wedge R_x)$$

$$\leftrightarrow (\forall x)\neg(M_x \wedge R_x) \quad (\text{by QN})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(\neg M_x \vee \neg R_x) \quad (\text{DeM})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x) \quad (\text{Impl})$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 對稱關係 (symmetrical)：
- 當  $x$  對  $y$  滿足關係  $R$  時， $y$  對  $x$  也滿足關係  $R$ ，則關係  $R$  是對稱的。

$$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow R_{yx})$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 反對稱關係 (asymmetrical)：
- 當  $x$  對  $y$  滿足關係  $R$  時， $y$  對  $x$  必不滿足關係  $R$ ，則關係  $R$  是反對稱的。

$$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow \neg R_{yx})$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 非對稱關係 (nonsymmetrical)：
- 當某個關係  $R$  既非對稱關係，亦非反對稱關係，則關係  $R$  是非對稱的。

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 傳遞關係 (transitive)：
- 在  $x$  對  $y$  滿足關係  $R$ ，而且  $y$  對  $z$  也滿足關係  $R$  的情況下， $x$  對  $z$  同時滿足關係  $R$ ，則關係  $R$  是傳遞的。

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 反傳遞關係 (intransitive)：
- 在  $x$  對  $y$  滿足關係  $R$ ，而且  $y$  對  $z$  也滿足關係  $R$  的情況下， $x$  對  $z$  同時必不滿足關係  $R$ ，則關係  $R$  是反傳遞的。

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow \neg R_{xz})$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 非傳遞關係 (nontransitive)：
- 當某個關係  $R$  非傳遞關係，亦非反傳遞關係，則關係  $R$  是非傳遞的。

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 全自反關係 (totally reflexive)：
- 當每個  $x$  均對  $x$  自身滿足關係  $R$  時，則關係  $R$  是全自反的。

$$(\forall x)R_{xx}$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 自反關係 (reflexive)：
- 當  $x$  對  $y$  滿足關係  $R$  時，同時  $x$  和  $y$  對其自身均滿足關係  $R$ ，則關係  $R$  是自反的。

$$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow (R_{xx} \wedge R_{yy}))$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 反自反關係 (irreflexive)：
- 當每個  $x$  均對  $x$  自身不滿足關係  $R$  時，則關係  $R$  是反自反的。

$$(\forall x)\neg R_{xx}$$

# Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 非自反關係 (nonreflexive)：
- 當某個關係  $R$  既非自反關係，亦非反自反關係，則關係  $R$  是非自反的。