第四章習題

泰勒定理

1. 設 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 10x + 5$, 試利用泰勒多項式，將 $P(x)$ 表示成形如 $\sum_{k=0}^{n} b_k (x-1)^k$ 的多項式。

2. 若 $f(x)$ 有泰勒展式

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}x^2 + \cdots + \frac{n}{n^2+1}x^n + \cdots, \quad n = 1, 2, \cdots$$

求下列函數的泰勒展式

(1) $f'(x)$　(2) $f''(x)$　(3) $\int_0^x f(x)\,dx$　(4) $x^3 f(x)$

常用函數的泰勒展式

1. 求下列函數對 $x = 0$ 的泰勒展式。

(1) $x \sin x$　(2) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$　(3) $\sin x^2$

(4) $\sqrt{1+x^3}$　(5) $\cos^{-1} x$

2. 利用 $e < 3$ 與課堂說明之誤差，說明如果要用下式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

來估計 e ，且希望誤差 $\leq \frac{1}{10000}$，則至少必須算到第幾項才足夠？

3.

(1) 求 $\sin x$ 對 $x = a$ 的泰勒展式？

(2) 代 $x = t + a$，說明

$$\sin(t+a) = \sin t \cos a + \cos t \sin a$$

4. 用 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，說明

(1) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

(2) $(e^{i\theta})' = i \cdot e^{i\theta}$

一些泰勒定理的應用

1. 求極限 $\left(\frac{0}{0}\right)$

   (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

   (3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x-\sin \pi x}$

2. 求極限 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

   (1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \ln x\,dx}{x\ln x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{e^x}$

   (3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$

3. 求極限

   (1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin x}\right)$ (2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

   (3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^x$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

插值法

1. 用牛頓插值法求過下列各點的插值多項式。

   (1) $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(2,0)$, $(-2,0)$

   (2) $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,6)$

2. 令 $\phi(x)$ 為滿足 $\phi(a-h)=A, \phi(a)=B$, $\phi(a+h)=C$ 的

   二次插值多項式。驗證下式。

$$\int_{a-h}^{a+h} \phi(x)\,dx = \frac{h}{3}(A+4B+C)$$

定積分的數值逼近

1. 若改用中點 $\frac{x_i+x_{i-1}}{2}$ 函數值，說明誤差公式會改進成

$$\text{誤差} \;\leq\; \frac{M_1}{4}\frac{(b-a)^2}{n}$$

2. 計算 $\displaystyle\int_0^1 \sin x^2\,dx$

   (1) 用 Simpson 法計算此定積分，n 至少要多少？誤差才會 ≤ 0.001

   (2) 利用計算機計算此值。

3. 用中點法 (梯形法乙) 求 $y = x^3,\ 0 \leq x \leq 1$ 的長度，使誤差小於 0.1。

4. 用 Simpson 法計算 $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$, $x-$ 軸旋轉體的體積，使誤差小於 0.01。

牛頓勘根法

1. 以牛頓勘根法求根。(至小數第五位)。

   (1) $y = x^5 - 2x^4 + 1$ 找非 1 的正根。

   (2) $y = e^x - 3x$, 找所有根。

2. 已知黃金分割比 $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 為 $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ 的根

   (1) 說明底下數列是用牛頓勘根法所給出的數列。

   $$x_n : \begin{cases} x_{k+1} = \frac{x_k^2+1}{2x_k-1} \; k \geq 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

3. 0 為 $f(x) = x^2 - x = 0$ 之一根，考慮運用牛頓法於函數 $f(x)$ 去逼近 0。請描述下面集合：

   $$\{x_0 \in \mathbb{R} \,|\, \text{以 } x_0 \text{ 為牛頓法起始點，可逼近 } 0 \text{ 者。}\}$$

4. 令 $f(x) = \ln x - 1$ 計算 e，已知 $2 < e < 3$，

   取 $x_0 = 2$，算出牛頓勘根數列的前五項。

「本章習題大部分選自《微積分乙》（臺大出版中心）」