第四章：函數的逼近

翁秉仁 教授

Outline

典型的例子：從 $1+x+x^2+\cdots+x^n$ 談起

- 由熟知的等比級數：

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

- 目標式 = 逼近式 (n) + 誤差式 (n)
- 考慮某定點 b，其中 $-1 \le b \le 0$，做 b 到 0 的定積分：

$$\begin{aligned}\ln(1-b) &= \int_b^0 \frac{1}{1-x}\,dx \\ &= \int_b^0 (1+x+x^2+\cdots+x^n)\,dx + \int_b^0 \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx\end{aligned}$$

典型的例子：從 $1+x+x^2+\cdots+x^n$ 談起

- 誤差式：

$$\int_b^0 \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx \le \frac{1}{n+2} \qquad \text{(見課堂說明。)}$$

- 令 $n \to \infty$，

$$\ln(1-x) = -\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\right) \qquad -1 \le x \le 0$$

- 當 $x=-1$，

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

其他例子

- 當 x 換成 $-x^2$ 時，等比級數為：

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

- 考慮定點 b，其中 $0 \leq b < 1$，做 0 到 b 定積分：

$$\begin{aligned}\tan^{-1} b &= \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \int_0^b 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n}\,dx + \int_0^b (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

- 誤差式：

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2n+3} \qquad \text{(見課堂說明)}$$

其它例子

- 令 $n \to \infty$ 時，

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \qquad -1 \leq x \leq 1$$

- 當 $x = 1$ 時，

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

outline

泰勒多項式

泰勒多項式：

下式 $P_n(x)$ 稱為 $f(x)$ 在 $(x-a)$ 展開的 n 次泰勒多項式。

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- 若 $n \to \infty$ 時，$P(x)$ 稱為對 $x-a$ 的泰勒展 (開) 式。

泰勒展式-例子

例 1 ：求 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $x = 0$ 展開的 n 次泰勒多項式。

$$P_n(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{2}{2}x^2 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

例 2 求 $g(x) = -\ln(1-x)$ 在 $x = 0$ 的 n 次泰勒多項式。

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{1}{n}x^n \left(= \int_0^x (1 + x + \cdots + x^{n-1})dx \right)$$

例 3 求 $h(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 在 $x = 0$ 的 n 次泰勒多項式。

$$P_n(x) = 1+2\cdot x+3\cdot x^2+\cdots+(n+1)x^n \left(= (1 + x + x^2 \cdots + x^{n+1})'\right)$$

泰勒展式-性質

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的泰勒展式各為

$$a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots \quad \text{與}$$

$$b_0+b_1(x-a)+\cdots+b_n(x-a)^n+\cdots$$

(1) 函數和 $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 泰勒展式為

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)(x-a)+\cdots+(a_n+b_n)(x-a)^n+\cdots$$

(2) 若 $f'(x)=g(x)$，則：

$$b_0=a_1,\ b_1=2a_2,\ b_2=3a_3\cdots,b_n=(n+1)a_{n+1}$$

(3) 若 $f(x)=g'(x)$，則：

$$b_0=g(a),\ b_1=a_0,\ b_2=\frac{a_1}{2},\cdots,b_n=\frac{a_{n-1}}{n}$$

(4) 函數 $(x-a)^m f(x)$ 在 $x=a$ 泰勒展式為

$$(x-a)^m\Big(a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots\Big)$$

泰勒定理

泰勒定理簡述：

主要推廣逼近的想法到所謂的 n 階逼近，即

$$\text{函數} = n\text{次泰勒多項式} + \text{逼近的誤差}$$

泰勒定理：$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$P_n(x)$ 是 $f(x)$ 對 $x = a$ 展開的 n 泰勒多項式，其中

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$。

餘項 (誤差) $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$,$\xi$ 介於 x 與 a 之間。

泰勒定理-例子

例： 重訪極值二階測試。

說明：

設 $f'(a)=0,\ f''(a)\neq 0\ P_2(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2$

$$\begin{cases} \text{若} f''(a)>0\text{，則} f(a) \text{ 為極小值。} \\ \text{若} f''(a)<0\text{，則} f(a) \text{ 為極大值。} \end{cases}$$

outline

常見函數

常見函數在 $x = 0$ 泰勒展式：

$$
\begin{cases}
e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots & x \in \mathbb{R} \\
\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots & x \in \mathbb{R} \\
\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \cdots & x \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

常見函數

歐拉公式：

$e^{i\pi}+1=0$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 為虛數單位。

說明：

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\cdots \\
&= 1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!} \\
&= (1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots)+i(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots) \\
&= \cos x+i\sin x
\end{aligned}
$$

二項式展開

在高中數學中，學過如下的二項式定理：

$$(1+x)^m = 1 + C_1^m x + \cdots + C_{m-1}^m x^{m-1} + x^m, \quad m \in N$$

性質：

當 $-1 < x < 1$ 時，$(1+x)^\alpha = 1 + C_1^\alpha + \cdots + C_n^\alpha x^n + \cdots$

其中

$$\begin{cases} C_0^\alpha & = & 1 \\ C_k^\alpha & = & \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

二項式展開-例題

例： 求 $\sin^{-1} x$ 在 $x = 0$ 的泰勒展式。

說明：

因為 $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 + (-x^2))^{\frac{-1}{2}}$

二項式展開得到：

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \mathrm{C}_1^{\frac{-1}{2}} x + \mathrm{C}_2^{\frac{-1}{2}} x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{\frac{-1}{2}} x^n + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \mathrm{C}_1^{\frac{-1}{2}} (-x^2) + \mathrm{C}_2^{\frac{-1}{2}} (-x^2)^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{\frac{-1}{2}} (-x^2)^n + \cdots$$

最後

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

得到

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

outline

由泰勒展式計算極限

例 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

說明：

因為 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

當 $x \to 0$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$

由泰勒展式計算極限

例 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

說明：

因為 $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$

$$\frac{\ln x}{x} = 1 - \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \cdots$$

當 $x \to 1$, $\frac{\ln x}{x-1} \to 1$

L'Hôpital 法則

定理 (L'Hôpital 法則：$\frac{0}{0}$)

若

$$\begin{cases} f(a) & = f'(a) = \cdots = f^{(i-1)}(a) = 0, \quad f^{(i)}(a) \neq 0 \\ g(a) & = g'(a) = \cdots = g^{(j-1)}(a) = 0, \quad g^{(j)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

則

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, & i > j \\ \text{不存在 (或說}\infty\text{)}, & i < j \\ \frac{f^{(i)}(a)}{g^{(i)}(a)}, & i = j \end{cases}$$

L'Hôpital 法則

定理 (L'Hôpital 法則：$\frac{0}{0}$ 第二型式)

$$\text{如果 } f(a) = g(a) = 0\text{，則 } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

已知事實：

當 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 或甚至 a 是 ∞ 時，

L'Hôpital 法則也都是對的。

L'Hôpital 法則-例子

例： 重訪 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 與 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

(其他見課堂。)

outline

插值法

牛頓插值法：

給定 (a_i, b_i)，$i = 1, \cdots, n$，我們要找到一個 $n-1$ 次多項式 $P(x)$ 滿足 $P(a_i) = b_i$，

(1) 令 $P_0(x) = b_1$，則 $P_0(a_1) = b_1$。

(2) 令 $P_1(x) = P_0(x) + \lambda_1(x - a_1)$，希望 $P_1(x)$ 滿足 $P_1(a_1) = b_1$ (顯然成立) 與 $P_1(a_2) = b_2$，這決定了係數 λ_1：$\lambda_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$。

(3) 再令 $P_2(x) = P_1(x) + \lambda_2(x - a_1)(x - a_2)$，則 $P_2(a_1) = b_1$，再要求 $P_2(a_3) = b_3$，λ_2 就被決定了。

重覆上述步驟，最後我們得到 $P(x) = P_{n-1}(x)$ 等於

$$
\begin{aligned}
b_1 + \lambda_1(x - a_1) + & \lambda_2(x - a_1)(x - a_2) + \cdots + \\
& \lambda_{n-1}(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{n-1})
\end{aligned}
$$

插值法-誤差估計

性質：

給定 $f(x)$，若 $P_{n-1}(x)$ 是過 $(a_i, f(a_i))$ 點的插值多項式，其中 $i = 1, \cdots, n$，不妨假設 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，則

$$\text{誤差} \equiv f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n}(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

其中 $\min(a_1, x) \leq \xi \leq \max(a_n, x)$

說明：

$\min\{a_1, \cdots, a_n\} = a$，$a$ 是指在從 a_1 至 a_n 中選最小的數。

$\max\{a_1, \cdots, a_n\} = a$，$a$ 是指在從 a_1 至 a_n 中選最大的數。

插值法-例題

例：

求 $\ln x$ 在給定三個點 $(2, \ln 2)$, $(2.1, \ln 2.1)$, $(2.2, \ln 2.2)$ 的二次插值多項式並估計 $2 \leq x \leq 2.2$ 時的誤差。

$(\ln 2 = 0.6931,\ \ln 2.1 = 0.7419,\ \ln 2.2 = 0.7885)$

插值法-例題說明

由於我們用的是二次插值多項式

$$y = -0.11(x-2)(x-2.1) + 0.488(x-2) + 0.6931$$

其誤差為 $\frac{f'''(\xi)}{6}(x-2)(x-2.1)(x-2.2)$，由於我們已假設 $2 \le x \le 2.2$，所以 $2 \le \xi \le 2.2$，又

$$f'''(\xi) = \frac{2}{\xi^2} \le \frac{1}{4}$$

且 $|(x-2)(x-2.1)(x-2/2)|$ 在 $[2, 2.2]$ 上之極大值為 $\frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{1000}$。
所以

$$|\text{誤差}| \le \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{1000} \approx 0.000016$$

outline

典型的例子

泰勒定理

常用函數的泰勒展式

L'Hôpital 法則

插值法

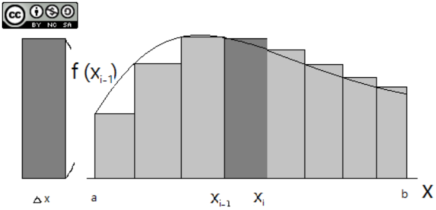
定積分的數值逼近

牛頓勘根法

定積分逼近-長方形法

由基本的黎曼和，

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$



長方形誤差估計

在 $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ 時，由平均值定理：

$$f(x) - f(x_{i-1}) = f'(xi)(x - x_{i-1}) \qquad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$$

定積分逼近-長方形法

如果假設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上滿足 $|f'(x)| \le M_1$ ，則

$$
\begin{aligned}
\Big|\text{第 } i \text{ 長方形誤差}\Big| &= \Big|\text{第 } i \text{ 段定積分} - \text{第 } i \text{ 長方形面積}\Big| \\
&= \left| \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \right) - \big(f(x_{i-1}) \Delta x \big) \right| \\
&= \left| \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \right) - \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})\, dx \right) \right| \\
&= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1}) \big)\, dx \right| \\
&\le \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big| f(x) - f(x_{i-1}) \Big|\, dx \left(\left| \int f\, dx \right| \le \int |f|\, dx \right) \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big| f'(\xi) \Big| (x - x_{i-1})\, dx \,(\text{平均值定理}) \\
&\le M_1 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})\, dx = M_1 \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2}
\end{aligned}
$$

定積分逼近-例題 (長方形法)

例： 計算 $\int_0^1 \sin x^2 \, dx$。

說明：

因為 $(\sin x^2)' = 2x \cos x^2$，在 $[0,1]$ 上

$$|(\sin x^2)'| \le 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

取 $M_1 = 2$，若用長方形法逼近此定積分到誤差 ≤ 0.001 的程度，則

$$\frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n} = \frac{2}{2} \frac{1}{n} \le 0.001.$$

所以 n 至少要 ≤ 1000 。

註：從上面的例子，知道 n 的估計依賴於 M_1 的估計。

定積分逼近-長方形中點法

說明 (第 i 長方形)：

由原來的函數值 $f(x_{i-1})$ 修改為 $\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$ ，所以

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) \Delta x$$

誤差估計：

$$|\text{誤差}| \le \frac{M_1}{4} \cdot \frac{(b-a)^2}{n}$$

註：上頁相同的問題，n 只需要 500 即可。

定積分逼近-梯形法

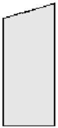
我們可以用兩種梯形 (如下圖) 來逼近 $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$

(甲) 兩端點所形成之梯形。

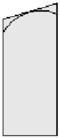
$$\text{面積} = \frac{\Delta x}{2}\big(\, f(x_{i-1}) + f(x_i)\,\big)$$

(乙) 用中點的切線所構成之梯形。

$$\text{面積} = \Delta x \cdot f\Big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Big)$$



(a) 法 (甲)



(b) 法 (乙)

定積分逼近-梯形法

梯形法 (甲)：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + \big(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

梯形法 (乙) 等於長方形中點法：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} f\big(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\big) \right)$$

定積分逼近-梯形法 (甲) 誤差估計

兩端點所形成的梯形就是利用割線去逼近函數，由插值函數之誤差估計知

$$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i)$$

其中

$$P_1(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$$

假設 $|f''(x)| \le M_2$，梯形法 (甲) 誤差為

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \Delta x\left(\frac{f(x_0)}{2} + \big(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big) + \frac{f(x_n)}{2}\right)\right|$$

$$\le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

定積分逼近-梯形法 (乙) 誤差估計

因為方法 (乙) 用到切線，我們要改用泰勒定理。

$$f(x) = \underbrace{f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f'\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\left(x - \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}_{P_1(x)} + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^2$$

所以梯形法 (乙) 的誤差為

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \Delta x \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right)\right| \le \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$$

註：

梯形法 (乙) 等於長方形中點法，但由上知，長方形中點法比前述的結果要更精確。

定積分逼近-Simpson 法

說明：

Simpson 法是利用二次多項式 (拋物線) 去逼近函數的方法，它不算複雜但又比長方形法與梯形法精確的多，是應用上最常用的定積分數值逼近法。

設 i 為奇數，在 $(x_{i-1}, f(x_{i-1})),(x_i, f(x_i)),(x_{i+1}.f(x_{i+1}))$ 三點上求出一條拋物線（即 2 階插植多項式$P_2(x)$去逼近函數$f(x)$），即

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

定積分逼近-Simpson 法

當 n 為偶數 $2k$：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3} \cdot \Big(f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \Big)$$

$\Big($ Simpson 法計算公式 $\Big)$

Simpson 法誤差估計：

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (\,S\,) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{n^4} \cdot \frac{M_4}{180}$$

註：

在 $[a, b]$ 上，$|f^{(4)}(x)| \leq M_4$。

outline

牛頓勘根法

牛頓勘根法：

(1) 找一個起點 x_0。

(2) 從 $(x_0, f(x_0))$ 作切線 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ 交 $x-$ 軸於 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

(3) 續用此法，得到數列 $\{x_n\}$ 的遞迴關係式：$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

註：

1. 牛頓勘根法並非萬能，任找一起點，不見得能找到所需的根；而且有些函數牛頓法不能用。例如：$y = \sqrt[3]{x}$。因此先瞭解函數圖形的模樣，會有很大的幫助。
2. 在實際應用上，在使用勘根定理、牛頓勘根法、下頁性質，找出合適的起始點。

牛頓勘根法

性質：

若在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 滿足

(1) $f'(x) \cdot f''(x) > 0$，即函數圖形遞增凹向上或遞減凹向下。

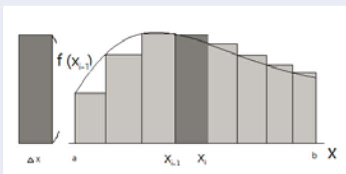
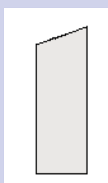
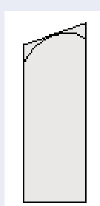
(2) $f(a) \cdot f(b) < 0$，即 a,b 間有一根。

則 $f(x)$ 在 a, b 間只有一根。若取 $x_0 = b$ 依牛頓勘根法 x_k 為遞減數列且必收斂到此根。

註：

若 (1) 改成 $f'(x) \cdot f''(x) < 0$，即函數圖形遞減凹向上或遞增凹向下，取 $x_0 = a$，則 x_k 為遞增數列且必收斂到此根。只要根附近滿足 $f'(x) \cdot f''(x) > 0$，取「稍微」右邊的起始點即可。同理，當 $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ 時，則取「稍微」左邊的點。

版權聲明

頁碼	作品	版權標示	作者/來源
1、43			轉載自Microsoft Office 2010 PowerPoint 設計主題範本 本作品依據 Microsoft 服務合約及著作權法第46、52、65條合理使用。
30			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
34			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。
34			作者：許孟弘 本作品採用創用CC「姓名標示-非商業性-相同方式分享」3.0台灣許可協議。