

十、變方分析 (Analysis of Variance) (Chapter 10)

劉仁沛 教授

國立台灣大學農藝學研究所生物統計組

國立台灣大學流行病學與預防醫學研究所

國家衛生研究院生物統計與生物資訊組

jpliu@ntu.edu.tw

變方分析 (Analysis of Variance)

1. F 分配 (F-Distribution)
2. 變異數同質性之檢定 (Homogeneity of Variance)
3. 單項變方分析 (One-way Analysis of Variance)
4. 完全隨機設計 (Completely Randomized Design)
5. 容許區間 (Tolerance Interval)

例：痛風病人與正常人血中尿酸量之變異

	樣品數	平均	變方
痛風病人	$n_1=10$	$\bar{x}_1=9.17$	$s_1^2=10.6001$
正常人	$n_2=8$	$\bar{x}_2=5.795$	$s_2^2=1.145$

痛風病人尿酸量之變異是否大於正常人的變異

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

例：一個試驗比較三種飼料對天竺鼠體重之影響

- 12 隻天竺鼠隨機指派食用三種飼料 (4 隻飼料 A ; 4 隻飼料 B ; 4 之飼料 C) , 兩星期後體重增加之觀測值 (g)

飼料	1	2	3	4
A	7	3	1 0	4
B	4	1 0	6	8
C	1 0	1 4	9	1 1

三種飼料對天竺鼠增重是否不同

三個族群平均值的比較

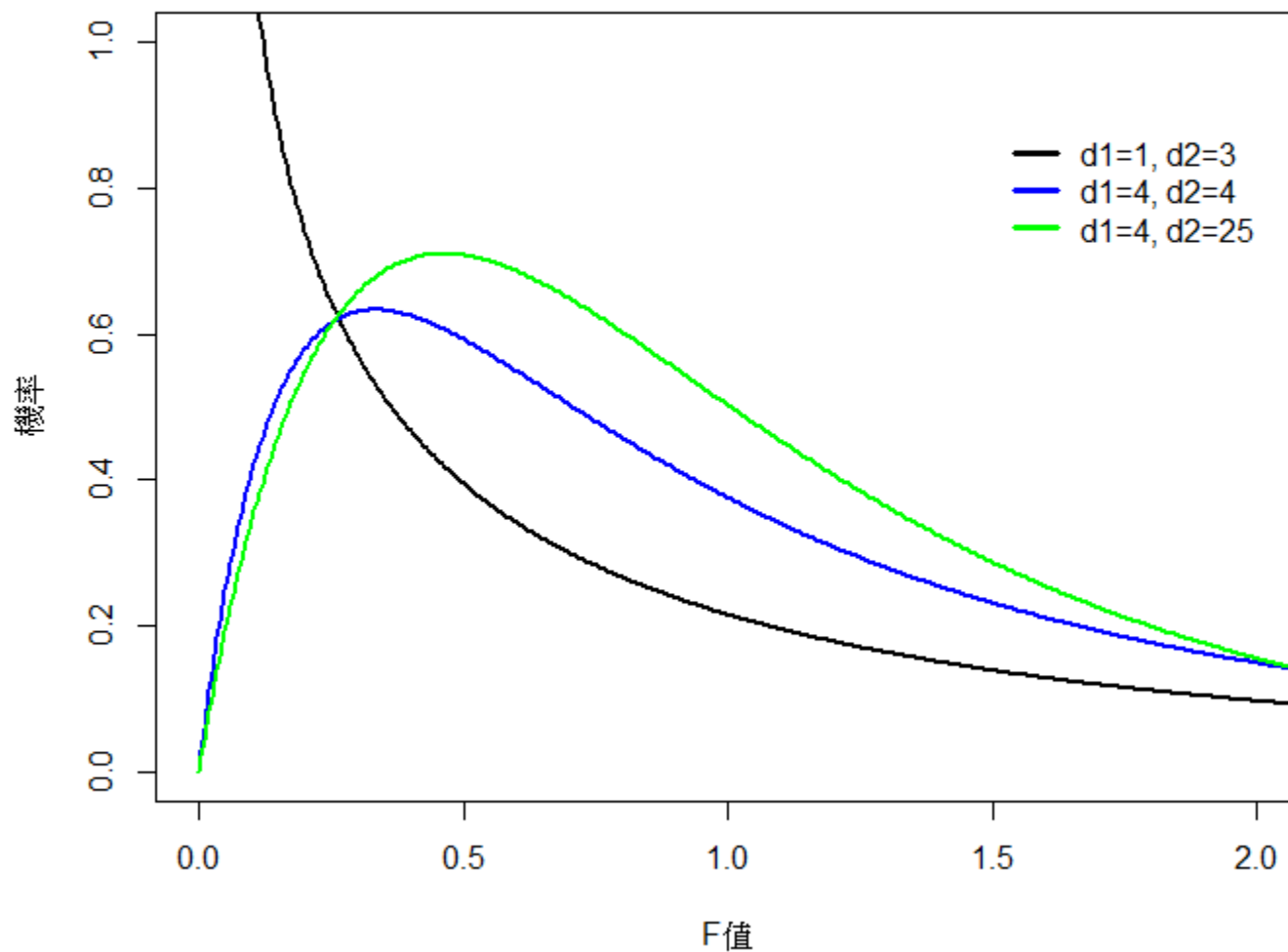
$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_a : \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

F 分佈

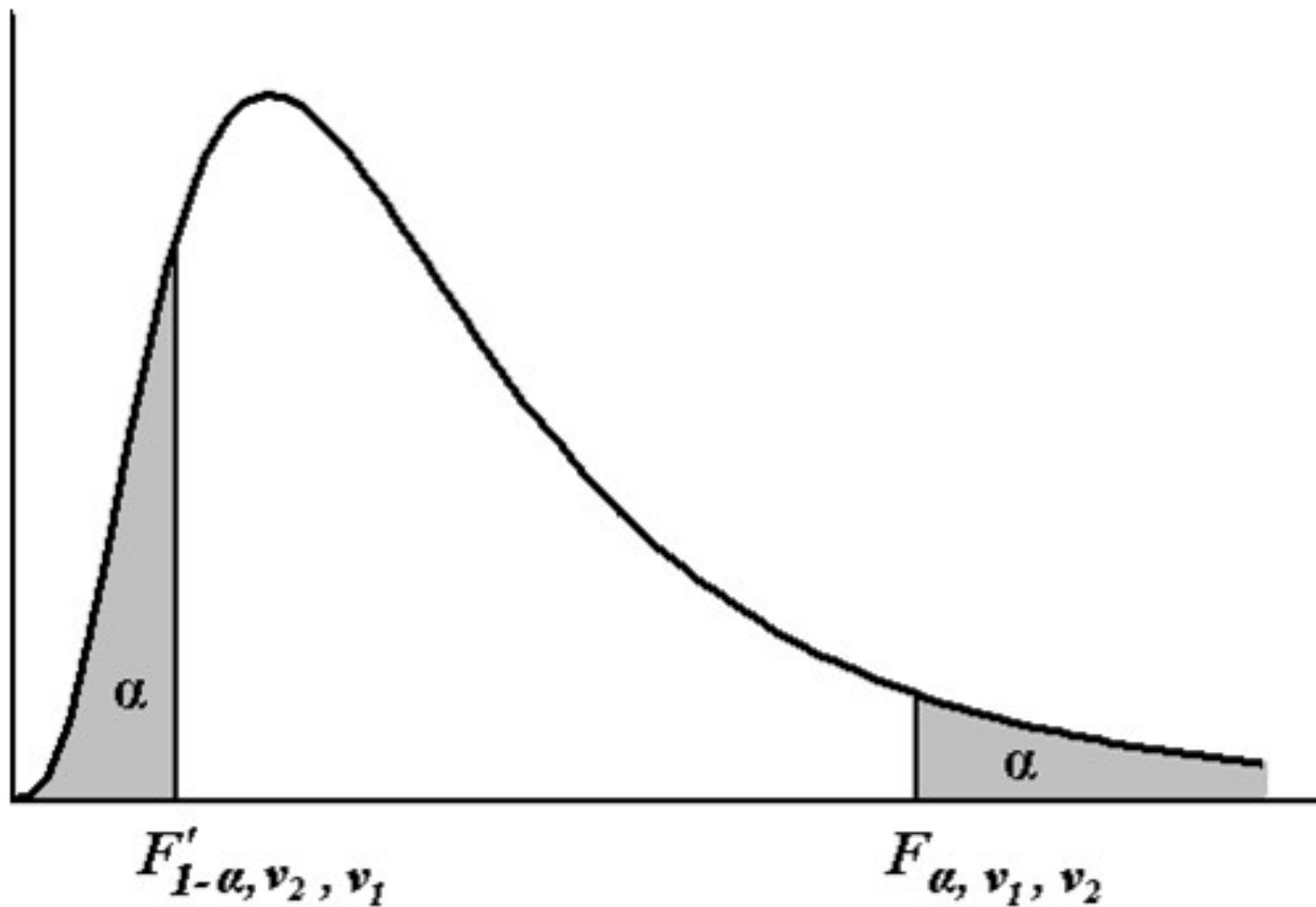
- 樣品變方（偏差平方和）之分佈→卡方分佈
- 兩個獨立樣品變方（或平方和）比的分佈
- 兩個獨立卡方變數之比的分佈
→ F 分佈 (F-Distribution)
- F 分佈為紀念 R.A. Fisher 而命名，
故稱費氏 F 分佈

F 分佈

- F 為兩個卡方變數比之分佈
- F 有兩個自由度
 - 分子卡方→分子自由度
 - 分母卡方→分母自由度
 - P.488-493 ，附表 7
- t 為標準常態變數除以卡方平方根比之變數
 - t 自由度為 n_1-1
- t^2 為分子自由度為 1 ，分母自由度為 n_1-1 之 F 分佈
- F 之倒數 $1/F$ 亦為 F 分佈：分子與分母自由度互換



自由度不同之 F 分布曲線圖



兩尾 F 值機率圖

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \quad V.S. \quad H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

敘述統計量			
	樣品數	平均	變方
1	n_1	$\bar{x}_1$	s_1^2
2	n_2	$\bar{x}_2$	s_2^2

$$\text{令 } S_N^2 = \max\{s_1^2, s_2^2\}; \text{自由度} = df_N$$

$$S_D^2 = \min\{s_1^2, s_2^2\}; \text{自由度} = df_D$$

決策方法：

$$F = S_N^2 / S_D^2 > F_{\alpha, df_N, df_D}$$

痛風病人與正常人尿酸量之變異

	樣品數	平均	變方
痛風病人	$n_1=10$	$\bar{x}_1=9.17$	$s_1^2=10.6001$
正常人	$n_2=8$	$\bar{x}_2=5.795$	$s_2^2=1.145$

$S_N^2 = \max\{10.6001, 1.145\} = 10.6001; df_N = 10 - 1 = 9$

$$S_D^2 = \min\{10.6001, 1.145\}; df_D = 8 - 1 = 7$$

$$F = 10.6001 / 1.145 = 9.25 > F_{0.05, 9, 7} = 3.6767$$

拒絕 H_0 痛風病人尿酸之變異大於正常人尿酸之變異

例：人工與儀器測定成年人血液中尿酸量 (mg/ml)

人工	$n_1=8$	4.5	5.6	6.5	7.5	8.6	9.8	10.7	12
儀器	$n_2=8$	6	6.8	7.6	8	8.5	9	9.5	9.8
$S_1^2 = 6.7457$		$df_1 = 8 - 1 = 7$							

$$S_2^2 = 1.7371 \quad df_2 = 8 - 1 = 7$$

$$S_N^2 = \max\{6.7457, 1.7371\} = 6.7457; \quad df_N = 7$$

$$S_D^2 = \min\{6.7457, 1.7371\} = 1.7371; \quad df_D = 7$$

$$F = 6.7457 / 1.7371 = 3.8833 > F_{0.05, 7, 7} = 3.7870 \quad \text{拒絕 } H_0$$

人工測定成人血液中尿酸的變異 > 儀器測定法的變異

飼料與天竺鼠 2 週增重 (g)

飼料	1	2	3	4	平均	組內偏差平方和	變方
A	7	3	10	4	6	30	10
B	4	10	6	8	7	20	6.67
C	10	14	9	11	11	14	4.67

總平均 = 8

- 飼料稱為處理組或處理 (Treatment)
- 天竺鼠稱為試驗單位 (Experimental Unit)

影響天竺鼠 2 週增重變異的原因 (變因)

- 已知變因 (Known Variation)
 - 飼料品牌
- 未知變因 (Unknown Variation)
 - 試驗誤差 (Experimental Error)
 - 其他所有可能的原因
 - 天竺鼠起始體重
 - 測量誤差
 - 試驗環境
 - ...

單項變方分析 (One-way Analysis of Variance)

- 飼料 A 第一號天竺鼠的兩週增重
- 兩週增重 - 總平均 = (飼料 A 平均 - 總平均)
+ (兩週增重 - 飼料 A 平均)
- 飼料 A 平均 - 總平均 = 處理 A 與總平均之偏差
= 組間變異
- 兩週增重 - 飼料 A 平均 = 飼料 A 第一號天竺鼠與
處理 A 之偏差
= 處理 A 組內變異

$$(7 - 8) = (6 - 8) + (7 - 6)$$

$$(3 - 8) = (6 - 8) + (3 - 6)$$

$$(10 - 8) = (6 - 8) + (10 - 6)$$

$$(4 - 8) = (6 - 8) + (4 - 6)$$

$$(4 - 8) = (7 - 8) + (4 - 7)$$

$$(10 - 8) = (7 - 8) + (10 - 7)$$

$$(6 - 8) = (7 - 8) + (6 - 7)$$

$$(8 - 8) = (7 - 8) + (8 - 7)$$

$$(10 - 8) = (11 - 8) + (10 - 11)$$

$$(14 - 8) = (11 - 8) + (14 - 11)$$

$$(9 - 8) = (11 - 8) + (9 - 11)$$

$$(11 - 8) = (11 - 8) + (11 - 11)$$

- (兩週增重 - 總平均)² 和
 $(-1)^2 + (-5)^2 + 2^2 + (-4)^2 + (-4)^2 + 2^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 6^2 + 1^2 + 3^2 = 120$
- (飼料平均 - 總平均)² 和
 $(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 = 56$
- (兩週增重 - 飼料平均)² 和
 $1^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 3^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 0^2 = 64$
- (兩週增重 - 總平均)² 和 = (飼料平均 - 總平均)² 和 + (兩週增重 - 飼料平均)² 和

$$120 = 56 + 64$$
- 總平方和 = 組間平方和 + 誤差平方和
 = 處理平方和 + 誤差平方和

資料結構

處理	觀測值	處理平均	樣品數
1	$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$	$\bar{x}_{1.}$	n_1
2	$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$	$\bar{x}_{2.}$	n_2
:	:	:	:
i	$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$	$\bar{x}_{i.}$	n_i
:	:	$\bar{x}_{.m}$	:
m	$x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn_m}$		$N = \sum_{i=1}^m n_i$

- 處理平均： $\bar{x}_{i.} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = x_{i.} / n_i$
- 總平均： $\bar{x}_{..} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = x_{..} / N$
- 總樣品數： $N = \sum_{i=1}^m n_i$

$$x_{ij} - \bar{x}_{..} = (\bar{x}_i - \bar{x}_{..}) + (x_{ij} - \bar{x}_i)$$

觀測值 - 總平均 = (處理平均 - 總平均) + (觀測值 - 處理平均)

總變異 = 組間變異 + 組內變異

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

總平方和 = 組間平方和 + 組內平方和

總平方和 = 已知變因平方和 + 未知變因平方和

總平方和 = 處理平方和 + 誤差平方和

$$SST = SSt + SSE$$

處理	樣品數	處理平均	組內平方和	自由度	組內變方
1	n_1	$\bar{X}_{1.}$	$SS_1 = \sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_{1.})^2$	$n_1 - 1$	$S_1^2 = SS_1 / (n_1 - 1)$
2	n_2	$\bar{X}_{2.}$	$SS_2 = \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_{2.})^2$	$n_2 - 1$	$S_2^2 = SS_2 / (n_2 - 1)$
:	:	:	:	:	:
i	n_i	$\bar{X}_{i.}$	$SS_i = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$	$n_i - 1$	$S_i^2 = SS_i / (n_i - 1)$
:	:	:	:	:	:
m	n_m	$\bar{X}_{m.}$	$SS_m = \sum_{j=1}^{n_m} (x_{mj} - \bar{x}_{m.})^2$	$n_m - 1$	$S_m^2 = SS_m / (n_m - 1)$

- 總平方和

$$SST = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{N}$$

- 總 (平方和) 自由度

$$df_T = N - 1 (\text{總樣品數} - 1)$$

- 處理平方和

$$SSt = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_j} (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i^2 - \frac{x_{..}^2}{N}$$

- 處理 (平方和) 自由度 $df_t = m - 1 (\text{處理數} - 1)$

- 誤差平方和

$$\begin{aligned}
 SSE &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 + \cdots \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n_m} (x_{mj} - \bar{x}_m)^2 \\
 &= SS_1 + SS_2 + \cdots + SS_i + \cdots + SS_m
 \end{aligned}$$

- 誤差自由度

$$\begin{aligned}
 df_E &= (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_i - 1) + \cdots + (n_m - 1) \\
 &= \sum_{i=1}^m (n_i - 1) = N - m = (N - 1) - (m - 1) \\
 &= \text{總自由度} - \text{處理自由度}
 \end{aligned}$$

- 總平方和 = 處理平方和 + 誤差平方和
- 總自由度 = 處理自由度 + 誤差自由度
- $SST = SSt + SSE$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$$

$$N - 1 = (m - 1) + (N - m)$$

- 均方 (Mean Square, MS) :
- 平均的平方和 = 平方和 / 自由度
 - 處理均方 : $MSt = SSt / (m - 1)$
 - 誤差均方 : $MSE = SSE / (N - m)$

單項變方分析 (One-way Analysis of Variance)

- 將上述結果整理於變方分析表
- Analysis of Variance Table (ANOVA Table)
- 第一行為變因 (Source of Variation, SOV)

變因 (SOV)	自由度 (df)	平方和 (SS)	均方 (MS)	F 值 (F-value)
處理	m-1	SSt	$MSt = SSt / (m - 1)$	MSt / MSE
誤差	N-m	SSE	$MSE = SSE / (N - m)$	

11/18/2023

Jen-pei Liu, PhD

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m \\ H_a : \mu_i \neq \mu_{i'}, 1 \leq i \neq i' \leq m \end{cases}$$

顯著水準為 α

決策方法

$$F = \frac{MSt}{MSE} > F_{\alpha, m-1, N-m}, \text{拒絕 } H_0$$

例：飼料與天竺鼠兩週增重 (g)

飼料	n_i	$\bar{X}_i$	組內平方和
A	4	6	30
B	4	7	20
	4	11	14

$$SST = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - x_{..}^2 / N = 7^2 + 3^2 + \dots + 11^2 - 96^2 / 12 = 888 - 768 = 120$$

$$df_T = 12 - 1 = 11$$

$$SSt = \sum_{i=1}^m n_i \bar{X}_i^2 - x_{..}^2 / N = 4[6^2 + 7^2 + 11^2] - 96^2 / 12 = 824 - 768 = 56$$

$$df_t = 3 - 1 = 2$$

$$SSE = SST - SSt = 120 - 56 = 64 = 30 + 20 + 14 = SS1 + SS2 + SS3$$

$$dfE = 12 - 3 = 9$$

ANOVA Table

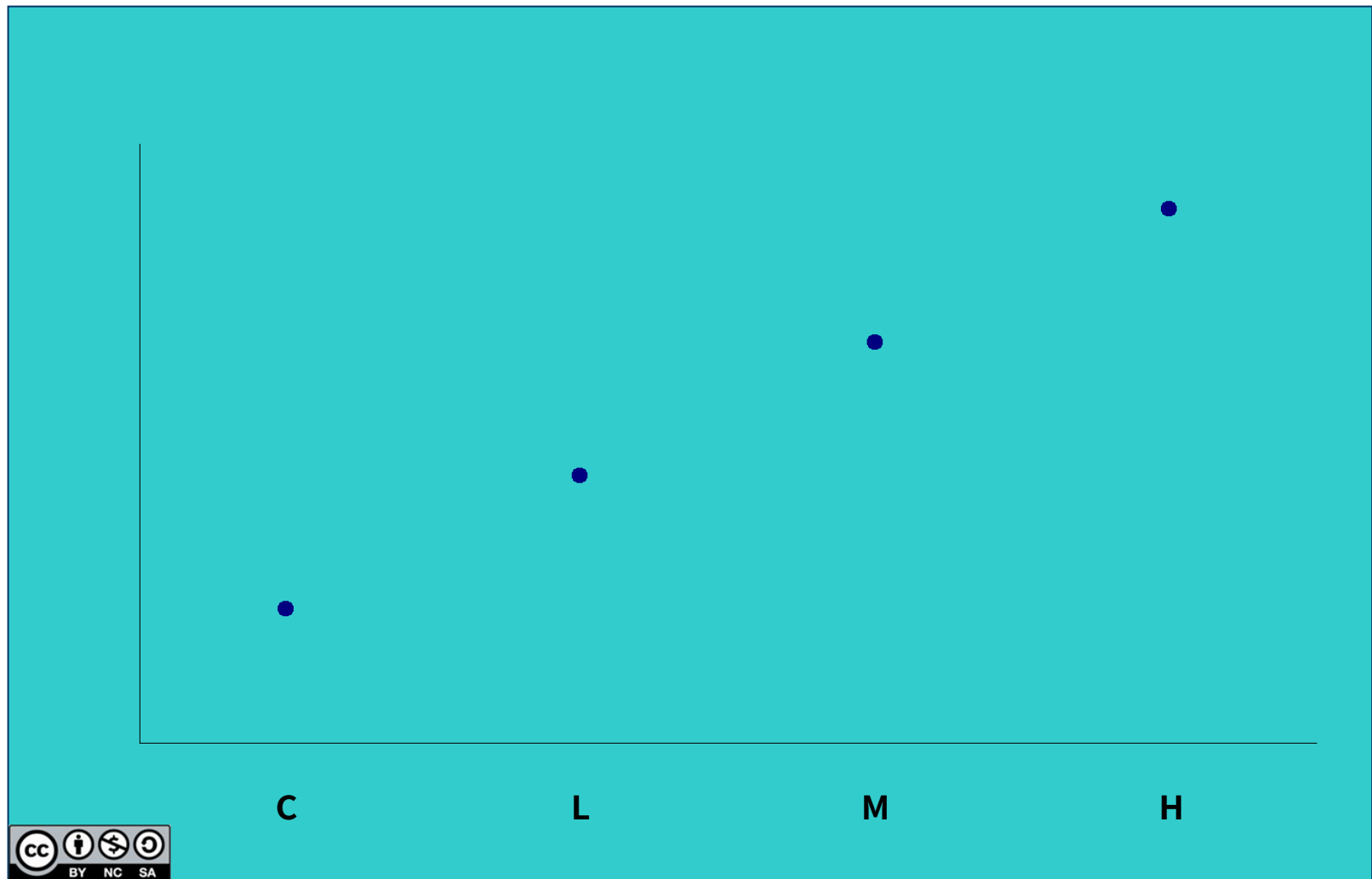
變因 (Sov)	自由度 (df)	平方和 (SS)	均方 (MS)	F 值 (F-value)
飼料	2	56	28=56/2	28/7.11=3.9375
誤差	9	64	7.11=64/9	
總和	11	120		

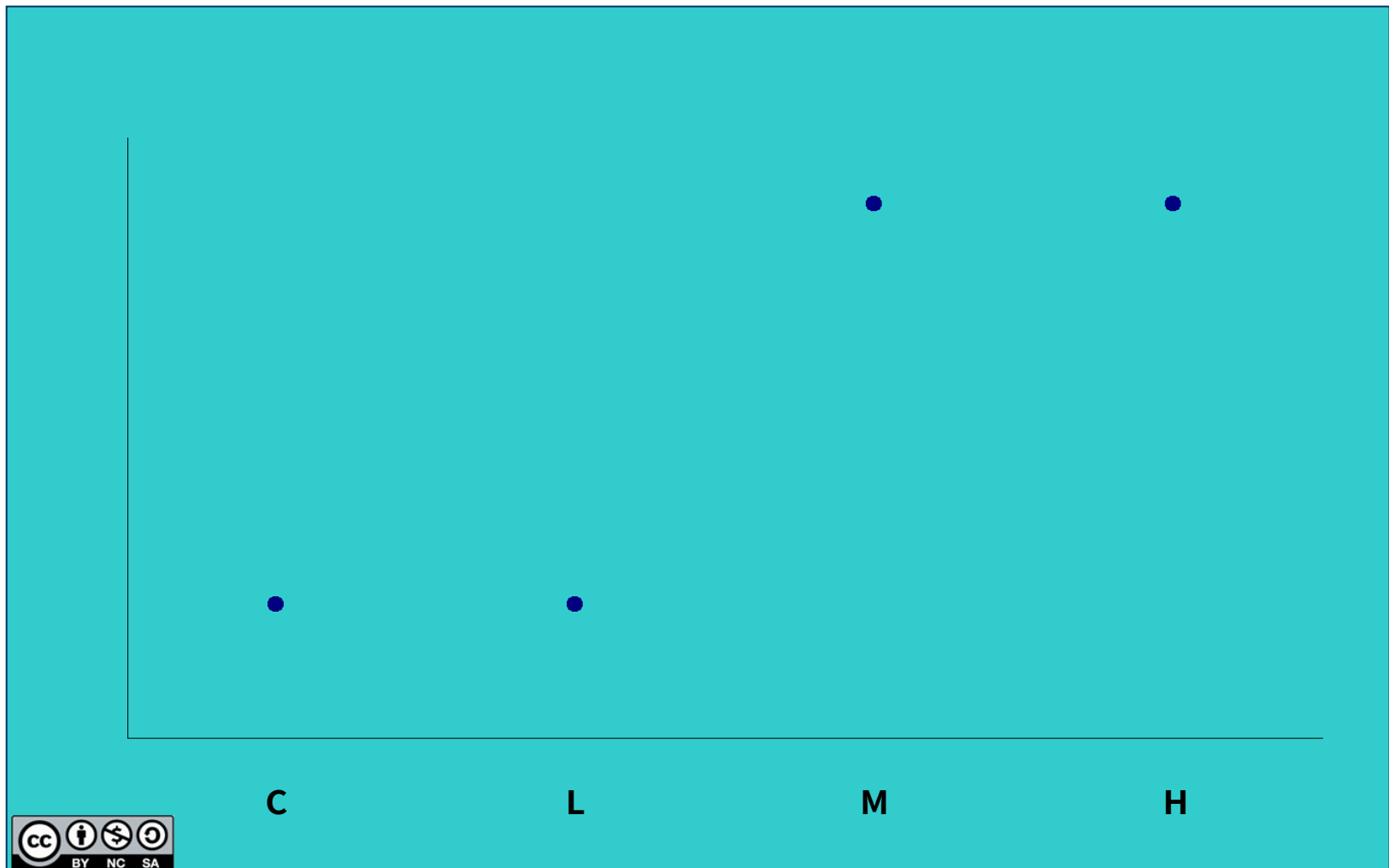
顯著水準為 $\alpha = 0.05$

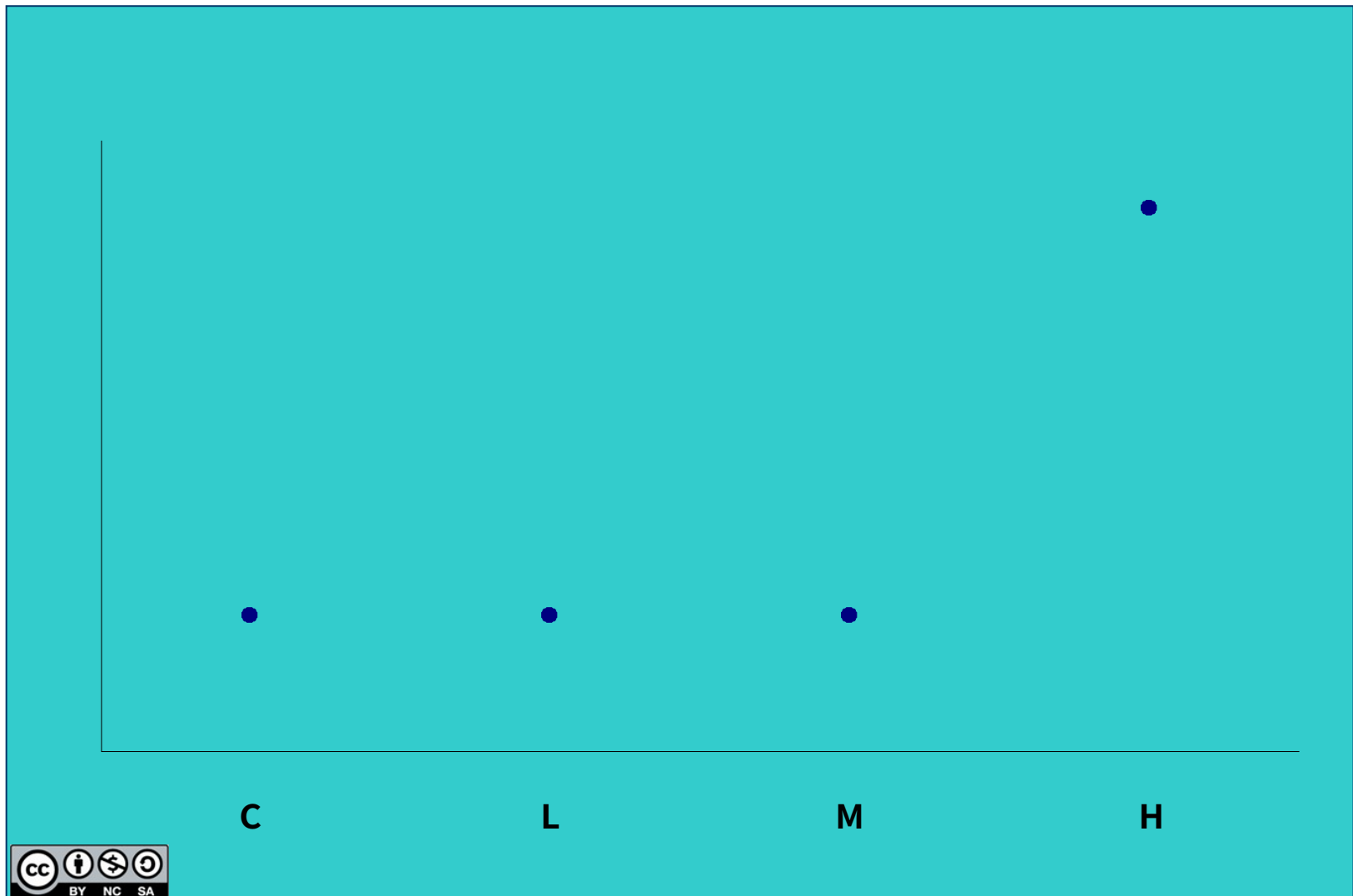
$$F = \frac{MSt}{MSE} = 28/7.11 = 3.9375 < F_{0.05, 2, 9} = 4.26, \text{ 不拒絕 } H_0$$

顯著水準為 $\alpha = 0.10$

$$F = \frac{MSt}{MSE} = 28/7.11 = 3.9375 > F_{0.10, 2, 9} = 3.0065, \text{ 拒絕 } H_0$$







例：微陣列試驗 (Microarray Exp)

- 基因數 $> 1,000$

試驗整體型 I 誤差機率很高



基因無表現 $\boxtimes$ 誤判有表現的機率很高



必須控制試驗整體型 I 誤差機率在顯著水準 α 之下

多重比較 (Multiple Comparisons)

- F 值顯著☒處理平均值間有顯著差異，但不知哪兩個處理平均值間有顯著差異，必須進行處理間之兩兩比較
- 三個飼料：三個兩兩比較
 - A VS. B
 - A VS. C
 - B VS. C

多重比較 (Multiple Comparisons)

- 個別比較型 I 誤差 (Comparisonwise Type I Error)
 - 單一兩兩比較之型 I 誤差
- 試驗整體型 I 誤差 (Experimentwise Type I Error)
 - 飼料試驗一共有三個兩兩比較，其中任一個的型 I 誤差

個別比較型 I 誤差機率 $\alpha = 0.05$	
兩兩比較個數	試驗整體型 I 誤差機率
1	0.05
2	0.08
3	0.14
4	0.19
:	:
10	0.50
:	:
1000	1
:	Jen-pei Liu, PhD
11/18/2023	

Fisher's 最小顯著差異 (Least Significance Difference, LSD)

$$(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}) \pm t_{\alpha/2, df_E} \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)}$$

- 決策方法：若處理 i 與 i' 之 LSD 不包括 0
☒ 處理 i 與 i' 之平均值間有顯著差異

例：飼料與天竺鼠兩週增重

$$df_E = 9 \quad \alpha = 0.10 \quad t_{0.05,9} = 1.833$$

$$t_{0.05,9} \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i}\right)} = 1.833 \cdot \sqrt{7.11\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} = 3.46$$

比較	LSD
A VS. B	(-4.46, 2.46)
A VS. C	(-8.46, -1.54)*
B VS. C	(-7.46, -0.54)*

Bonferroni 多重比較方法

- 顯著水準： α ，兩兩比較個數： k
- 調整顯著水準： $\alpha^* = \alpha/k$
- Bonferroni(1- α)% 信賴區間

$$(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}) \pm t_{\alpha/2k, df_E} \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)}$$

- 決策方法：若處理 i 與 i' 之 Bonferroni(1- α)% 信賴區間不包括 0
☒ 處理 i 與 i' 之平均值間有顯著差異

例：飼料與天竺鼠兩週增重

$$df_E = 9 \quad \alpha = 0.10 \quad K = 3 \quad \alpha^K = \alpha / K = 0.1 / 3 = 0.033$$

$$t_{0.0167, 9} = 2.51 \quad t_{0.0167, 9} \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i}\right)} = 2.51 \cdot \sqrt{7.11\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} = 4.73$$

比較	
A VS. B	(-5.73, 3.73)
A VS. C	(-9.73, -0.27)*
B VS. C	(-8.73, 0.73)

Tukey's 忠誠顯著差異值 (Honest Significance Distance, HSD)

- Q_{α, m, df_E} 各組樣本數必須相等

$$(\bar{X}_i - \bar{X}_{i'}) \pm q_{\alpha, m, df_E} \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n}\right)}$$

- 決策方法：若處理 i 與 i' 之 HSD 不包括 0
☒ 處理 i 與 i' 之平均值間有顯著差異

若樣本數不等，取平均樣本數

例：飼料與天竺鼠兩週增重

$$m=3 \quad df_E = 9 \quad \alpha = 0.10 \quad q_{0.1,3,9} = 3.32$$

$$q_{0.1,3,9} \sqrt{MSE(\frac{1}{n})} = 3.32 \cdot \sqrt{7.11(\frac{1}{4})} = 4.42$$

比較	HSD
A VS. B	(-5.42, 3.42)
A VS. C	(-9.42, -0.58)*
B VS. C	(-8.42, 0.42)

族群容許區間 (Tolerance Interval)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \mu \text{ 及 } \sigma^2 \text{ 已知時}$$

範圍	觀測值
$(\mu - 1.645\sigma, \mu + 1.645\sigma)$	90%
$(\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma)$	95%
$(\mu - 2.58\sigma, \mu + 2.58\sigma)$	99%

族群中 95% 的觀測值會落在 $(\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma)$ 之間

- μ 及 σ^2 未知時必須修正為 κ 值，替代標準常態百分位

$$\bar{X} \rightarrow \mu; S \rightarrow \sigma$$

所得 $(\bar{X} - \kappa S, \bar{X} + \kappa S)$ ，稱為容許區間

- κ 值隨樣品數，信心水準 $(1-\gamma)$ 與包含率 $(1-\alpha)$ 而異，見 P.500-502 附表 13(雙尾 : P.502)
- 所得的容許區間：
 - 吾人有 $(1-\gamma)\%$ 信心水準，族群中 $(1-\alpha)\%$ 觀測值介於 $(\bar{X} - \kappa S, \bar{X} + \kappa S)$ 之間
- 應用於品管方面： $(1-\gamma)\%$ 信心保證 $(1-\alpha)\%$ 產品會在 $(\bar{X} - \kappa S, \bar{X} + \kappa S)$ 之間
- ☒ 應用於生物特性正常值範圍

例：某醫院30位新生兒血液中含鈣量 (mg %)

$$\bar{x} = 10.5 \quad s = 0.86$$

求有90%信心族群中95%新生兒血液含鈣量的範圍

$$1-\gamma = 0.9 \quad 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \kappa = 2.417 (p.502)$$

$$\bar{x} \pm \kappa s = 10.5 \pm 2.417 \times 0.86 = 10.5 \pm 2.08$$

$$(8.42, 12.58)$$

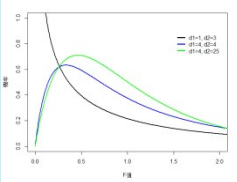
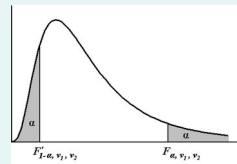
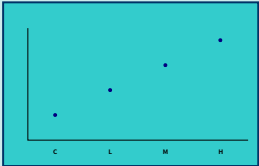
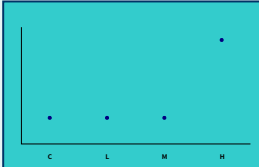
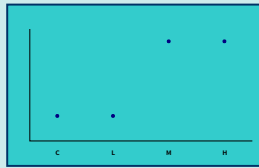
吾人有90%信心族群95%新生兒血液中含鈣量在
(8.42, 12.58)之間

總結 (Summary)

- F 分配
- 變異數同質之檢定
- 單向變方分析
- 多重比較
- 容許區間

習題

- P321 1(a),
3(b),(c) multiple comparisons by
Bonferroni and Tukey HSD methods
- P322 4
- P323 8(a)
- P324 11

頁碼	作品	授權條件	作者 / 來源
7			國立臺灣大學 農藝系 劉仁沛 教授。
8			國立臺灣大學 農藝系 劉仁沛 教授。
27			國立臺灣大學 農藝系 劉仁沛 教授。
28			國立臺灣大學 農藝系 劉仁沛 教授。
29			國立臺灣大學 農藝系 劉仁沛 教授。