第 3 章

超越函數 (Transcendental Functions)

目錄

(i) 介紹反函數及其導函數。

(ii) 介紹指數, 對數函數, 反三角函數, 雙曲函數及其導函數。

(iii) 介紹成長與衰變。

(iv) 介紹二階微分方程。

3.1 反函數 (Inverse Functions)

反函數

定義 3.1.1.

(1) 一個函數 f 若滿足 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, 則 f 稱爲一對一 (one-to-one) 函數。

(2) 若 f 爲一對一函數, 其定義域爲 D, 値域爲 R, 則其反函數 $f^{-1}: R \to D$ 定義爲 $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$, 其中 $a \in D$ 且 $b \in R$ 。

性質 3.1.2.

(1) $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$ 。

(2) f^{-1} 的定義域是 $f(x)$ 的値域; f^{-1} 的値域是 $f(x)$ 的定義域 。

(3) $(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in \operatorname{Dom} f$ 。

本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」台灣3.0版授權釋出

(4) $(f \circ f^{-1})(y) = y, \forall y \in \text{Dom}\, f^{-1} = \text{Range}f$ 。

(5) $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x), \forall x \in \text{Dom}\, f$ 。

(6) $y = f(x)$ 與 $y = f^{-1}(x)$ 之圖形對 $x = y$ 直線對稱。

註 3.1.3.

(1) $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$ 。

(2) 若 f 爲 D 上的嚴格上昇 (下降) 函數, 則 $f(x)$ 爲一對一且有反函數。

(3) 若 f 爲 (a, b) 上的實值連續函數, 且有反函數 f^{-1}, 則 f^{-1} 亦爲連續。

例 3.1.4. 求 $y = x^2$, $x \geq 0$ 之反函數。$x \leq 0$ 呢?

例 3.1.5. 作 $f(x) = \sqrt{-1-x}$ 及其反函數的圖形。

例 3.1.6. 一函數若滿足 $f^{-1} = f$, 則稱爲自反函數 (self-inverse)。例如: $f(x) = \frac{1}{x}$ 。

例 3.1.7. $g(x) = \sin x$:

(i) 定義在 $[0, \pi]$ 上時, 不是一對一;

(ii) 定義在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上時爲嚴格遞增, 所以是一對一。故可定義反函數 $\sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ 。

反函數之微分

定理 3.1.8. 若 f 及 g 互爲反函數, 且 f 爲可微, 則對 $f'(g(x)) \neq 0$ 之 x 值, $g'(x)$ 存在, 且 $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ 。

註 3.1.9. 此定理之幾何意義。

例 3.1.10. 令 $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ 。求 $(f^{-1})'(x)$ 。

例 3.1.11. 令 $f(x) = x^3 - 2$, 求 $\frac{df^{-1}}{dx}\big|_{x=6}$ 。

3.2 極限定義指數及對數函數 (Exponential and Logarithm Functions)

指數函數

3.2.1. (1) 現考慮形如 $f(x) = a^x$ 之函數。就不同的 x 值而言, 其意義如下:

$$
\begin{aligned}
&x = n,\, n \in \mathbb{N} && \Rightarrow && a^n = a \times \cdots \times a \text{ 。} \\
&x = -n && \Rightarrow && a^{-n} = (\tfrac{1}{a})^n \text{ 。} \\
&x = \tfrac{1}{n} && \Rightarrow && a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ 。} \\
&x = \tfrac{q}{p}, (p, q) = 1, p > 0, p, q \in \mathbb{Z} && \Rightarrow && a^{\frac{q}{p}} = (\sqrt[p]{a})^q \text{ 。}
\end{aligned}
$$

定義 3.2.2. 給定 $a>0$ 以及任意實數 x, 令 $\{r_n\}$ 爲滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ 的任意有理數列, 則定義指數函數 $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ 。

例 3.2.3. 定義無理指數 $2^{\sqrt{2}}$: 令 a_n 爲 $\sqrt{2}$ 的小數點後第 n 位數字, 即 $\sqrt{2} = 1.a_1a_2a_3a_4\cdots$, 則可以定義

$$2^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1.a_1a_2\cdots a_n},$$

其中 $1.a_1a_2\cdots a_n$ 均爲有理數。

註 3.2.4. 以上定義是合理的, 亦即對滿足條件的任意有理數列 $\{r_n\}$, 我們可定義出唯一的極限值。

性質 3.2.5. 若 $a,b>0, x,y\in\mathbb{R}$, 則

(1) $a^0 = 1$ 。

(2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 。

(3) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ 。

(4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ 。

(5) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$ 。

(6) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ 。

(7) $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x,\ b\neq 0$ 。

(8) 若 $a>1$, 則 $x>0 \Rightarrow a^x>1$; $x<0 \Rightarrow 0<a^x<1$;
若 $a<1$, 則 $x>0 \Rightarrow 0<a^x<1$; $x<0 \Rightarrow a^x>1$ 。

(9) 若 $a>1$, 則 $x<y \Rightarrow a^x<a^y$;
若 $a<1$, 則 $x<y \Rightarrow a^x>a^y$。

(10) 若 $a>1$, 則 $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$;
若 $a<1$, 則 $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$ 。

(11) a^x 爲 $\mathbb{R}$ 上的連續函數。

<u>對數函數</u>

定義 3.2.6. 由以上的性質可知 a^x 有反函數。定義其反函數爲以 a 爲底的對數函數, 記爲 $\log_a x$ 。

性質 3.2.7. 對 $b>0, x>0, a>0, a\neq 1$, 對數函數滿足:

(1) $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ 。

(2) $\log_a(a^x) = x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$,
$a^{\log_a x} = x,\quad \forall x>0$ 。

(3) $\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$ 。

(4) $\log_a bx = \log_a b + \log_a x$ 。

(5) $\log_a \frac{b}{x} = \log_a b - \log_a x$ 。

(6) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ 。

(7) $\log_a x^r = r \log_a x$ 。

(8) 若 $a > 1$, 則 $\lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = -\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$;
若 $a < 1$, 則 $\lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = \infty$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$ 。

(9) $\log_a x$ 爲 $(0, \infty)$ 上的連續函數。

例 3.2.8.

(1) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 5^2 = 25$,

(2) $7^\pi \cdot 8^\pi = (7\cdot 8)^\pi = 56^\pi$ 。

例 3.2.9. 作圖 $f(x) = 3 - \frac{1}{2}\cdot 5^{-x}$, 並求它的定義域及值域。

例 3.2.10. 化簡:

(1) $\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 15$,

(2) $\log_{a^2} a^3$,

(3) $3^{\log_9 4}$ 。

例 3.2.11. 解方程式 $3^{x-1} = 2^x$ 。

例 3.2.12. 解方程式 $3^{\log_3 7} - 4^{\log_4 2} = 5^{(\log_5 x - \log_5 x^2)}$ 。

例 3.2.13. 令 $f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x}} - 3^{-\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}}}$ 。
求 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 。

例 3.2.14. 令 $f(x) = \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ 。
求 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 。

例 3.2.15. 令 $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 。

3.3 自然對數及指數函數 (Natural Logarithm and Exponential Functions)

自然對數函數

定義 3.3.1. 對 $x > 0$, 令 A_x 爲曲線 $y = \frac{1}{t}$, $t-$軸及 $t = 1, t = x$ 所圍成之區域面積。定義自然對數爲

$$\ln x = \begin{cases} A_x & , x \geq 1 \\ -A_x & , 0 < x < 1 \end{cases} 。$$

定理 3.3.2.

(1) 若 $x>0$, 則 $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$ 。

(2) $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ 。

性質 3.3.3. 若 $x,y>0$, 則:

(1) $\ln 1=0$; $\ln x<0$, 若 $x\in(0,1)$; $\ln x>0$, 若 $x\in(1,\infty)$ 。

(2) $\ln xy=\ln x+\ln y$ 。

(3) $\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$ 。

(4) $\ln(x^r)=r\ln x$, $r\in\mathbb{Q}$ 。

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, 故 $\text{Range}(\ln x)=\mathbb{R}$ 。

(6) $\ln x$ 爲 連續、可微、嚴格遞增的函數。

例 3.3.4. 作圖 $y=\ln(x-2)-1$ 。

例 3.3.5. 證明 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函數, 並求其反函數。

例 3.3.6. 求導函數:

(1) $\ln|\cos x|$,

(2) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 。

例 3.3.7. 求 $y=\ln x$ 之切線使其通過原點。

例 3.3.8. 當 c 爲何値時, 圖形 $y=\ln x$ 及 $y=cx^2$ 恰交於一點?

<u>自然指數函數</u>

定義 3.3.9. 定義 $\ln x$ 的反函數爲 $y=\exp x$ 。

性質 3.3.10.

(1) $y=\exp x \Leftrightarrow x=\ln y$ $(y>0)$ 。

(2) $\ln(\exp x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R};\ \exp(\ln x)=x,\forall x>0$ 。

(3) $(\exp x)^r=\exp(rx),\forall r\in\mathbb{Q}$ 。

(4) $\exp(x+y)=(\exp x)(\exp y)$ 。

(5) $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$ 。

(6) $\exp(x-y)=\frac{\exp x}{\exp y}$ 。

定義 3.3.11.

(1) $e=\exp(1)$ 。

(2) 定義自然指數函數 (natural exponential function) 爲 $e^x = \exp x, x \in \mathbb{R}$ 。

[註]

(1) 此數值 e 大約爲 $2.71828182845905\cdots$ 。

(2) $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ 。

性質 3.3.12.

(1) $e^{x+y} = e^x e^y$ 。

(2) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ 。

(3) $(e^x)^r = e^{rx},\ r \in \mathbb{R}$ 。

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ 。

(5) $\ln x = \log_e x$ 。

(6) $\frac{d}{dx}e^x = e^x,\ \int e^x dx = e^x + C$ 。

例 3.3.13. 求方程式 $e^{5-3x} = 10$ 的解。

例 3.3.14. 求 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}$ 。

例 3.3.15. 求導函數:

(1) $y = e^{x^2-3x}$,

(2) $y = \sqrt{1+e^{2x}}$,

(3) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$,

(4) $y = e^{\sec 3\theta}$,

(5) $y = \sin(x^2 + e^x)$ 。

例 3.3.16. 求 $y = \frac{e^x}{x^2+1}$ 在 $P(1, \frac{e}{2})$ 的切線及法線方程式。

例 3.3.17. 令 $f(t) = e^{at}$, 求:

(1) $f^{(n)}(t)$,

(2) $\int f(t)dt$ 。

例 3.3.18. 若 $f(x) = xe^x$, 求 $f^{(n)}$ 。

<u>一般指數函數</u>

定義 3.3.19. 對 $a > 0$, 定義一般指數函數 (general exponential function) 爲 $a^x = e^{x \ln a}, x \in \mathbb{R}$ 。

性質 3.3.20. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ 。

定義 3.3.21. 利用 a^x 的定義, 可知任給 $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, a^b 均可定義。因此冪次函數 x^r 可定義, 其中 $r\in\mathbb{R}$, 且定義域爲 $(0,\infty)$ 。

性質 3.3.22.

(1) $\frac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}, r\in\mathbb{R}$ 。

(2) $\log_a(x^r)=r\log_a x$ 。

例 3.3.23. 求:

(1) $\frac{d}{dx}3^{\sin x}$,

(2) $\frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}}$,

(3) $\frac{d}{dx}(2+\sin 3x)^{\pi}$ 。

例 3.3.24. 證明曲線 $y=x^{\pi}-\pi^{x}$ 在 $x=\pi$ 的斜率是負的。

<u>一般對數函數</u>

定義 3.3.25. 對 $a>0$, 定義一般對數函數 (general logarithm function) $\log_a x$ 爲 a^x 的反函數

註 3.3.26.

(1) $\log_2 x$ 在計算科學上常用。

(2) $\log_e x$ 常記爲 $\ln x$, 稱爲自然對數。

(3) $\log_{10} x$ 常記爲 $\log x$, 稱爲常用對數。

性質 3.3.27. $\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$。

例 3.3.28. 求導函數:

(1) $f(x)=\frac{d}{dx}\log(3x+1)$,

(2) $f(x)=\log_5(2+\sin x)$,

(3) $f(x)=\log_e\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ 。

<u>對數微分法</u> (logarithmic differentiation)

例 3.3.29. 求 $f(x)=x^x$ 的臨界點。

例 3.3.30. 求導函數:

(1) $f(x)=\frac{d}{dx}(x^{x^x})$, $x>0$,

(2) $f(x)=\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}})$, $x>0$,

(3) $f(x)=(\sin x)^{\ln x}, 0<x<\pi$,

(4) $f(x)=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+4)}$,

(5) $f(x)=\sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$,

(6) $f(x)=\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ 。

3.4 指數成長與衰變(Exponential Growth and Decay)

引理 3.4.1. 若 $x > 0$, 則 $\ln x \leq x - 1$ 。

定理 3.4.2. 若 $a > 0$, 則

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$,

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$,

(4) $\lim\limits_{x\to 0+} x^a \ln x = 0$ 。

定理 3.4.3. 若一個量 y 在時間 t 時增加 (或減少) 的速度與在該時的量成正比, 在時間 $t = 0$ 時的量記爲 y_0 。則 y 滿足初値問題 $y'(t) = ky(t)$, $y(0) = y_0, y > 0$ 。
以上的量滿足指數變化律 (law of exponential change), 即 $y = y_0 e^{kt}$ 。當 $k > 0$ 爲成長, $k < 0$ 爲衰變。k 稱爲成長常數。

註 3.4.4.

(1) $y = e^{kx} (k \neq 0)$ 通常作爲指數成長或衰變的模型。

(2) 當 $k > 0$, $y = y_0 e^{kx}$ 稱爲指數成長; 當 $k < 0$, $y = y_0 e^{kx}$ 稱爲指數衰變。

例 3.4.5. 若細胞成指數成長。開始有 500 個細胞, 24 小時後有 800 個細胞, 則 12 小時後有幾個細胞?

例 3.4.6. 人口成長 $\frac{dP}{dt} = kP$, k 爲人口相對成長率。
在 1950 年世界人口 25.60 億, 1960 年爲 30.40 億, 以此作爲人口模式。人口相對成長率是多少? 估計 1993 年及 2020 年的人口數。

例 3.4.7. 放射性物質衰變 $\frac{dm}{dt} = -km$, k 爲相對衰變率。
C^{14} 的衰變常數爲 $1.2 \cdot 10^{-4}$。若原本 C^{14} 的量爲 A, 預測在 866 年後, 衰變所餘的量爲何?

例 3.4.8. 鐳-226半生期是1590年, 一個鐳的樣本重100mg, 求 t 年後鐳之質量的公式, 求 1000 年後的質量, 何時剩下 30mg?

例 3.4.9. 釙210 的衰變常數爲 5×10^{-3}, 求半生期 (half life)。

例 3.4.10. 牛頓冷卻定律 (Newton's Law of Cooling) 令 $H(t)$ 爲物體在時間 t 的溫度, H_s 爲周圍環境的溫度, 則其滿足微方 $\frac{dH}{dt} = -k(H - H_s)$ 。由此得 $H = H_s + (H_0 - H_s)e^{-kt}$, H_0 是 $t = 0$ 的溫度。

例 3.4.11. 室溫 22°C 的汽水放入 7°C 的冰箱中。半小時後, 汽水的溫度是 16°C 。

(a) 再半小時溫度降到多少?

(b) 須多久, 才會使溫度降到10°C 。

<u>連續複利</u>

定理 3.4.12.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 。

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ 。

定理 3.4.13. 投資 A_0 元, 固定年利率爲 r, 採連續複利(continuously compounded interest) , 則在 t 年後的本利和是 $A(t) = A_0e^{rt}$。

例 3.4.14. 若在銀行存款 1000 元, 以連續複利 6% 計算, 3 年後的本利和是多少?

例 3.4.15. 投資公司通常以連續複利計算投資的成長, 在 2000 年投資 100 元, 年利率 5.5%, 估計 2004 年的資金總額。

例 3.4.16. 新杰拿 1000 元投資, 年利率 5.5%, 以連續複利計息, 則何時可達到 2500 元?

3.5 反三角函數 (Inverse Trigonometric Functions)

定義 3.5.1. 以下函數

$$
\begin{aligned}
&\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\\
&\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1],\\
&\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty),\\
&\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, \infty),\\
&\sec x : [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty),\\
&\csc x : (0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi) \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty),
\end{aligned}
$$

爲一對一, 因此有反函數。分別爲

$$y = \sin^{-1} x,\ y = \cos^{-1} x,\ y = \tan^{-1} x,\ y = \cot^{-1} x,\ y = \sec^{-1} x,\ y = \csc^{-1} x \text{ 。}$$

註 3.5.2.

(1) $\sin^{-1} x$ 又可寫爲 $\arcsin x$, 其餘亦同。

(2) $(\sin x)^{-1}$ 表示 $\frac{1}{\sin x}$ 。

(3) $\sin^n x = (\sin x)^n, n \in \mathbb{N}$;
$\sin x^n = \sin(x^n), n \in \mathbb{Z}$ 。

例 3.5.3. 求値：

(1) $\sin^{-1}\frac{1}{2}$,

(2) $\sin^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}})$,

(3) $\sin^{-1} 2$,

(4) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ 。

例 3.5.4. 若 $\alpha = \sin^{-1}\frac{2}{3}$，求 $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$ 及 $\csc\alpha$ 。

例 3.5.5. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin^{-1}(\frac{1-x}{1-x^2})$ 。

例 3.5.6. 求函數 $f(x) = \big(\sin^{-1}(x^{-1})\big)^{-1}$ 的定義域。

例 3.5.7. 求值：

(1) $\sin(\sin^{-1} 0.7)$,

(2) $\sin^{-1}(\sin 0.3)$,

(3) $\sin^{-1}(\sin\frac{4\pi}{5})$,

(4) $\cos(\sin^{-1} 0.6)$,

(5) $\tan(\tan^{-1} 3)$,

(6) $\tan^{-1}(\tan\frac{3\pi}{4})$,

(7) $\cos(\tan^{-1} 2)$,

(8) $\tan(\arcsin\frac{1}{3})$,

(9) $\sec(\tan^{-1}\frac{x}{3})$ 。

例 3.5.8. 化簡

(1) $\cos(\cos^{-1} x)$,

(2) $\cos^{-1}(\cos x)$,

(3) $\tan(\sin^{-1} x)$,

(4) $\cos(\tan^{-1} x)$ 。

性質 3.5.9.

(1) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ 。

(2) $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$ 。

(3) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ 。

定理 3.5.10.

(1) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, $|u| < 1$,

(2) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, $|u| < 1$,

(3) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$,

(4) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$,

(5) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$, $|u| > 1$,

(6) $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$, $|u| > 1$ 。

例 3.5.11.

(1) 求 $\sin^{-1}(\frac{x}{a})$ 。

(2) 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 。

(3) 解 $y' = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}(-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}), \quad y(1) = 2\pi$ 。

例 3.5.12.

(1) 求 $\tan^{-1}(\frac{x}{a})$ 。

(2) 求 $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$。

例 3.5.13. 微分:

(1) $y = \frac{1}{\sin^{-1}(x^2)}$,

(2) $f(x) = x \arctan \sqrt{x}$,

(3) $y = \sec^{-1}(5x^4)$ 。

例 3.5.14. 求 $y = \cot^{-1} x$ 在 $x = -1$ 的切線方程式。

例 3.5.15. 證明 $\tan^{-1}(\frac{x-1}{x+1}) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$, $x > -1$ 。

例 3.5.16. 令 $f(x) = \sin\left(\sin^{-1} x\right), g(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ 。

(1) 求 f, g 的定義域。

(2) 化簡 $f(x)$ 及 $g(x)$。

(3) 作 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 之圖形。

(4) $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$在何處連續在何處可微?

(5) 求 f, g 的導函數。

例 3.5.17. 若 $y = \tan^{-1} x$, 證明

(1) $y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$,

(2) $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \left(1 + x^2\right)^{-\frac{n}{2}} \sin\left(n \tan^{-1} \frac{1}{x}\right), \forall x > 0$,

(3) 求 $y^{(n)}(0)$ 。

例 3.5.18. 令 $y = \sin^{-1} x$, 求 $y^{(n+1)}$ 。

3.6 雙曲函數 (hyperbolic functions)

雙曲函數及其導函數

定義 3.6.1.

(1) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

(2) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

(3) $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

(4) $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$,

(5) $\text{sech } x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$,

(6) $\text{csch } x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ 。

註 3.6.2.

(1) $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$ 。

(2) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ 。

(3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$(可應用至雙曲線的參數式)。

定理 3.6.3.

(1) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$,

(2) $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$,

(3) $\frac{d}{dx} \tanh x = \text{sech }^2 x$,

(4) $\frac{d}{dx} \coth x = -\text{csch }^2 x$,

(5) $\frac{d}{dx} \text{sech } x = -\text{sech } x \tanh x$,

(6) $\frac{d}{dx} \text{csch } x = -\text{csch } x \coth x$ 。

例 3.6.4. 求 $\frac{d}{dt}(\tanh \sqrt{1+t^2})$ 。

反雙曲函數及其導函數

定義 3.6.5. 反雙曲函數為

(1) $y = \sinh^{-1} x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(2) $y = \cosh^{-1} x : [1, \infty) \to [0, \infty)$,

(3) $y = \tanh^{-1} x : (-1, 1) \to \mathbb{R}$,

(4) $y = \coth^{-1} x : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(5) $y = \text{sech }^{-1} x : (0, 1] \to [0, \infty)$,

(6) $y = \text{csch}^{-1}x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$。

註 3.6.6.

(1) $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), x \in \mathbb{R}$,

(2) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), x \geq 1$,

(3) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$,

(4) $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, |x| > 1$,

(5) $\text{sech}^{-1}x = \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}), 0 < x \leq 1$,

(6) $\text{csch}^{-1}x = \ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}), x \neq 0$。

定理 3.6.7.

(1) $\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \forall u$,

(2) $\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, u > 1$,

(3) $\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, |u| < 1$,

(4) $\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, |u| > 1$,

(5) $\frac{d(\text{sech}^{-1}u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, 0 < u < 1$,

(6) $\frac{d(\text{csch}^{-1}u)}{dx} = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, u \neq 0$。

3.7 二階微分方程 (Second-Order Differential Equations)

定義 3.7.1.

(1) 形如 $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$ 之微分方程稱爲二階線性微分方程 (second-order linear differential equation), 其中要求 $P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x)$ 均爲連續函數。

(2) 若 $G(x) \equiv 0$, 則此微分方程稱爲齊次(homogeneous)。

定理 3.7.2. 若 y_1 及 y_2 是一齊次線性微分方程 $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ 之解, c_1 及 c_2 是任意兩常數, 則線性組合 $c_1y_1 + c_2y_2$ 仍爲其解。

定義 3.7.3. 若兩函數 y_1 及 y_2, 任一個均不爲另一個函數之常數倍, 則稱他們是線性獨立的 (linearly independent)。

定理 3.7.4. 若 y_1 及 y_2 爲齊次線性微分方程 $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ 之解, 且它們是線性獨立的, 則此微分方程之通解 (general solutions) 爲 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$。

定理 3.7.5. 考慮二階常係數齊次線性微分方程 $ay''+by'+cy = 0, a \neq 0$, 方程式 $ar^2+br+c = 0$ 稱爲其特徵方程式或 輔助方程(characteristic equation or auxiliary equation)。

(1) 若 $b^2-4ac>0$, r_1 及 r_2 爲特徵方程之兩相異實根, 則微方的通解爲 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ 。

(2) 若 $b^2-4ac=0$, r 爲特徵方程之根, 則微方的通解爲 $y=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$ 。

(3) 若 $b^2-4ac<0$, $r_1=\alpha+i\beta$ 及 $r_2=\alpha-i\beta$ 爲特徵方程之複數根, 則微方的通解爲 $y=e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$ 。

例 3.7.6. 解 $y''+y'-6y=0$ 。

例 3.7.7. 解 $3\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-y=0$ 。

例 3.7.8. 解 $4y''+12y'+9y=0$ 。

例 3.7.9. 解 $y''-6y'+13y=0$ 。

初始值問題 (Initial-value problems)

例 3.7.10. 解 $y''+y'-6y=0$, $y\left(0\right)=1$, $y'\left(0\right)=0$ 。

例 3.7.11. 解 $y''+y'=0$, $y\left(0\right)=2$, $y'\left(0\right)=3$ 。

邊界值問題 (Boundary-value problems)

例 3.7.12. 解 $y''+2y'+y=0$, $y\left(0\right)=1$, $y\left(1\right)=3$ 。

簡諧運動

3.7.13. 質量 m 之物體置於彈簧末端。當彈簧從自然長度伸展 x 時, 其恢復力 (restoring force) 爲 $-kx$, k 爲彈簧常數。假設沒有任何其他外力, 則得微方 $m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$ 。令 $\omega^2=\frac{k}{m}$, 則

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0,$$

稱爲簡諧運動方程 (equation of simple harmonic motion)。其通解爲

$$x\left(t\right)=A\cos\omega t+B\sin\omega t=R\cos(\omega(t-t_0))。$$

$\omega/2\pi$ 爲頻率、$R=\sqrt{A^2+B^2}$ 爲振幅、$T=2\pi/\omega$ 爲週期。如此運動稱爲簡諧運動 (simple harmonic motion)。

例 3.7.14. 解微方並求頻率、振幅、週期:

$$y''+16y=0, y(0)=-6, y'(0)=32 。$$

例 3.7.15. 100 g 的物體掛在彈簧上, 施力 3×10^4g-cm/s^2 可使彈簧伸長 2 cm。在 $t=0$ 將彈簧拉長 2 cm 並以 60 cm/s 的初速彈回, 求此物體的位置函數。

阻滯振動 (Damped Vibrations)

定理 3.7.16. 假設彈簧運動中有阻力, 它與速度反方向、與速率成正比。則阻滯力 (damping force) 爲 $-c\frac{dx}{dt}$ 。故 $m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$ 。

(1) $c^2-4mk>0$ (超阻滯, overdamping): $mr^2+cr+k=0$ 之解爲 $r_1=\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$、$r_2=\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$, 則通解爲 $x=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$ 。

(2) $c^2-4mk=0$ (臨界阻滯, critical damping): $mr^2+cr+k=0$ 之解爲 $r=\frac{-c}{2m}$, 則通解爲 $x=(c_1+c_2t)\,e^{rt}$ 。

(3) $c^2-4mk<0$ (低阻滯, underdamping): $mr^2+cr+k=0$ 之根爲 $\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$, 則通解爲

$$x=e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\left(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t\right),\omega=\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}\text{ 。}$$