

Unit 9 初階邏輯語言

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用 CC 「姓名標示－非商業性－相同方式分享」台灣 3.0 版授權釋出】

Unit 9 初階邏輯語言

- 傳統邏輯不足之處：只能處理一元述詞的語句，不能處理關係 (relation) 述詞的語句。
- 以 “ $a > b$ ” 為例說明：
- (1) 傳統邏輯讀法：“ a ” 具有 “ $> b$ ” 這個性質。
- (2) 關係述詞讀法：“ a ” 和 “ b ” 兩個東西滿足 “ $>$ ” 這個關係。

Unit 9 初階邏輯語言

- 單稱語詞 (singular terms)：用來表達個別東西 (individual things) 的語詞，以小寫字母 a 、 b 、 c 表示。
- 變量 (variables)：用來表達非特定對象的語詞，以小寫字母 x 、 y 、 z 表示。

Unit 9 初階邏輯語言

- 述詞符號：用來表達 n 個對象之間的關係， $n \geq 1$ 。
- 一元述詞： $P_a, Q_b, R_x, T_y, \dots$
- 二元述詞： $P_{ab}, Q_{bc}, R_{xy}, T_{yz}, \dots$
- n 元述詞： P_{a_1, a_2, \dots, a_n}
- 注意： $P_{ab} \neq P_{ba}$

Unit 9 初階邏輯語言

- 量詞：用來表達量的多寡的語詞。
- 全稱量詞： $(\forall x)$ 、 $(\forall y)$ 、 $(\forall z)$
- 存在量詞： $(\exists x)$ 、 $(\exists y)$ 、 $(\exists z)$

Unit 9 初階邏輯語言

- 初階邏輯語言
- (1) 符號：
 - (i) 名稱符號： a 、 b 、 c
 - (ii) 變量： x 、 y 、 z
 - (iii) n 元述詞符號： P 、 Q 、 R
 - (iv) 量詞： \forall 、 \exists
 - (v) 連接詞： \neg 、 \wedge 、 \vee 、 \rightarrow 、 \leftrightarrow
 - (vi) 等同符號： $=$
 - (vii) 輔助符號： $($ 、 $)$

Unit 9 初階邏輯語言

- (2) 形構規則：分成 (a) 原子句式 (atomic formulae) 以及 (b) 複合句式 (compound formulae)
- (a) 原子句式
 - (i) 以等同符號連接兩個名稱符號的句式，例如 $a = b$ 。
 - (ii) 如果 P 是 n 元述詞，則 $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 為原子句式。

Unit 9 初階邏輯語言

- (b) 複合語句：
 - (i) 如果 ϕ 是一個句式，那麼 $\neg \phi$ 也是句式。
 - (ii) 如果 ϕ 和 ψ 都是句式，那麼 $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$ 也都是句式。
 - (iii) 如果 ϕ 是一個句式，那麼 $(\forall x)\phi(x)$ 和 $(\exists x)\phi(x)$ 也是句式。
 - (iv) 除了經由規則 (a) 和規則 (b) 建構的句式之外，沒有其他句式。

Unit 9 初階邏輯語言

- 句式實例說明：
- 以 a 代表蘇格拉底， P_x 代表 x 是哲學家，則 P_a 代表蘇格拉底是哲學家。
- 以 P_x 代表 x 是哲學家，則 $(\forall x)P_x$ 是指所有的 x 都是哲學家。
- 以 P_x 代表 x 是哲學家，則 $(\exists x)P_x$ 是指有些 x 是哲學家。

Unit 9 初階邏輯語言

- 如果以 a 代表蘇格拉底， b 代表柏拉圖， P_{xy} 代表 x 是 y 的老師。那麼， P_{ab} 代表 a 是 b 的老師。
- 如果以 P_{xy} 代表 x 是 y 的老師，則 $(\forall x)(\forall y)P_{xy}$ 代表所有的 x 都是任意 y 的老師。 $(\exists x)(\exists y)P_{xy}$ 代表有些 x 是有些 y 的老師。

Unit 9 初階邏輯語言

- $(\forall x)(\exists y)P_{xy}$ 代表任何 x 都是一些 y 的老師。 $(\exists y)(\forall x)P_{xy}$ 代表對某些 y 而言，所有的 x 都是 y 的老師。
- $(\exists x)(\forall y)P_{xy}$ 代表有些 x 是所有 y 的老師。 $(\forall y)(\exists x)P_{xy}$ 代表對所有的 y 而言，都有一些 x 是 y 的老師。

Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- A 句型：所有的人都是理性的。
- M_x ： x 是人。
- R_x ： x 是理性的。

$$(\forall x)(M_x \rightarrow R_x)$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- E 句型：所有的人都不是理性的。
- M_x ： x 是人。
- R_x ： x 是理性的。

$$(\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x)$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- /句型：有些人是理性的。
- M_x ： x 是人。
- R_x ： x 是理性的。

$$(\exists x)(M_x \wedge R_x)$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- O 句型：有些人是不理性的。
- M_x ： x 是人。
- R_x ： x 是理性的。

$$(\exists x)(M_x \wedge \neg R_x)$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 由於 A 句型與 O 句型是矛盾的，因此 A 句型的否定和 O 句型是等值的。

$$(QN) \quad \boxed{\times} \neg(\forall x)\phi(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\phi(x)$$

$$\neg(\forall x)(M_x \rightarrow R_x)$$

$$\leftrightarrow (\exists x)\neg(M_x \rightarrow R_x) \quad (\text{by QN})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg M_x \vee R_x) \quad (\text{Impl})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(\neg\neg M_x \wedge \neg R_x) \quad (\text{DeM})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(M_x \wedge \neg R_x) \quad (\text{DN})$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 反之， O 句型的否定和 A 句型也是等值的。

$$(QN) \quad \boxed{\times} \neg(\exists x)\phi(x) \leftrightarrow (\forall x)\neg\phi(x)$$

$$\neg(\exists x)(M_x \wedge \neg R_x)$$

$$\leftrightarrow (\forall x)\neg(M_x \wedge \neg R_x) \quad (\text{by QN})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(\neg M_x \vee \neg\neg R_x) \quad (\text{DeM})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(\neg M_x \vee R_x) \quad (\text{DN})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(M_x \rightarrow R_x) \quad (\text{Impl})$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 由於 E 句型與 I 句型是矛盾的，因此 E 句型的否定和 I 句型是等值的。

$$(QN) \quad \neg(\forall x)\neg\phi(x) \leftrightarrow (\exists x)\phi(x)$$

$$\neg(\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x)$$

$$\leftrightarrow (\exists x)\neg(M_x \rightarrow \neg R_x) \quad (\text{by QN})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg M_x \vee \neg R_x) \quad (\text{Impl})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(\neg\neg M_x \wedge \neg\neg R_x) \quad (\text{DeM})$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(M_x \wedge R_x) \quad (\text{DN})$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 反之， \forall 句型的否定和 \exists 句型也是等值的。

$$(QN) \quad \neg(\exists x)\phi(x) \leftrightarrow (\forall x)\neg\phi(x)$$

$$\neg(\exists x)(M_x \wedge R_x)$$

$$\leftrightarrow (\forall x)\neg(M_x \wedge R_x) \quad (\text{by QN})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(\neg M_x \vee \neg R_x) \quad (\text{DeM})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x) \quad (\text{Impl})$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 對稱關係 (symmetrical)：
- 當 x 對 y 滿足關係 R 時， y 對 x 也滿足關係 R ，則關係 R 是對稱的。

$$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow R_{yx})$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 反對稱關係 (asymmetrical)：
- 當 x 對 y 滿足關係 R 時， y 對 x 必不滿足關係 R ，則關係 R 是反對稱的。

$$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow \neg R_{yx})$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 非對稱關係 (nonsymmetrical)：
- 當某個關係 R 既非對稱關係，亦非反對稱關係，則關係 R 是非對稱的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 傳遞關係 (transitive)：
- 在 x 對 y 滿足關係 R ，而且 y 對 z 也滿足關係 R 的情況下， x 對 z 同時滿足關係 R ，則關係 R 是傳遞的。

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 反傳遞關係 (intransitive)：
- 在 x 對 y 滿足關係 R ，而且 y 對 z 也滿足關係 R 的情況下， x 對 z 同時必不滿足關係 R ，則關係 R 是反傳遞的。

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow \neg R_{xz})$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 非傳遞關係 (nontransitive)：
- 當某個關係 R 非傳遞關係，亦非反傳遞關係，則關係 R 是非傳遞的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 全自反關係 (totally reflexive)：
- 當每個 x 均對 x 自身滿足關係 R 時，則關係 R 是全自反的。

$$(\forall x)R_{xx}$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 自反關係 (reflexive)：
- 當 x 對 y 滿足關係 R 時，同時 x 和 y 對其自身均滿足關係 R ，則關係 R 是自反的。

$$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow (R_{xx} \wedge R_{yy}))$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 反自反關係 (irreflexive)：
- 當每個 x 均對 x 自身不滿足關係 R 時，則關係 R 是反自反的。

$$(\forall x)\neg R_{xx}$$

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 非自反關係 (nonreflexive)：
- 當某個關係 R 既非自反關係，亦非反自反關係，則關係 R 是非自反的。